İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR - II

GRAFİĞİ VERİLEN PARABOLÜN DENKLEMİ

1. Durum

x Eksenini Kestiği Noktaları Bilinen Parabolün Denklemi

x eksenini kestiği noktalar $(x_1,0)$ ve $(x_2,0)$ olan parabolün denklemi,

$$y = a(x - x_1)\cdot(x - x_2) \text{ veya}$$

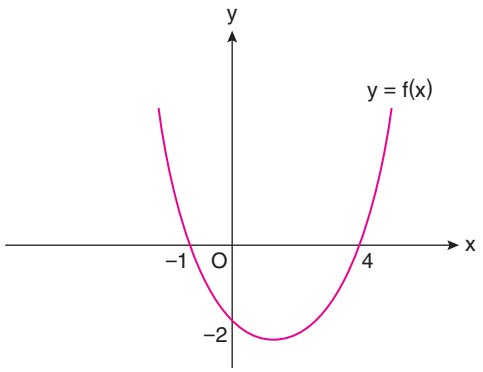
$$y = a(x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2)$$

şeklinde ifade edilir.

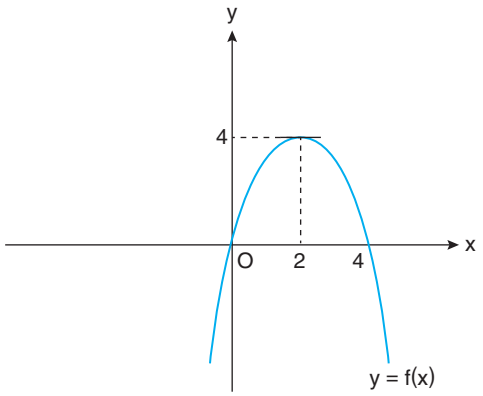
ÖRNEK-1

Aşağıda verilen parabollerin denklemlerini yazınız.

a.

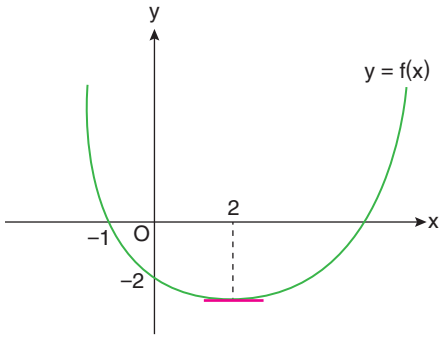


b.



ÖRNEK-2

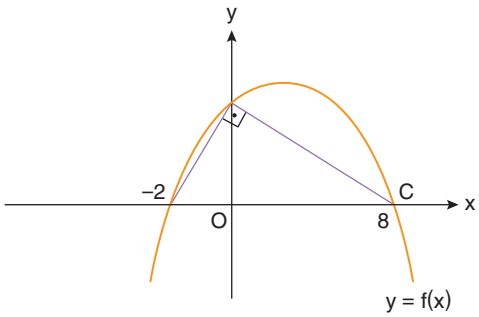
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ikinci dereceden f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f(3) değerini bulunuz.

ÖRNEK-3

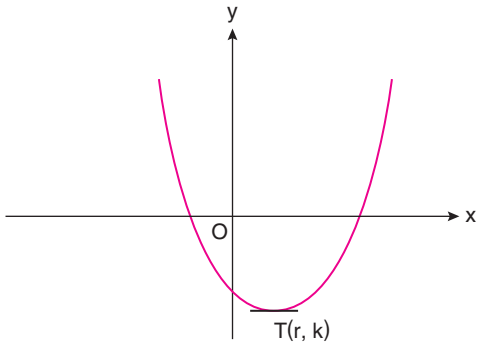
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



f fonksiyonunun tepe noktası T(r, k) olmak üzere, r + k toplamını bulunuz.

2. Durum

Tepe Noktası Bilinen Parabolün Denklemi



Tepe noktası (r, k) olan parabolün denklemi,

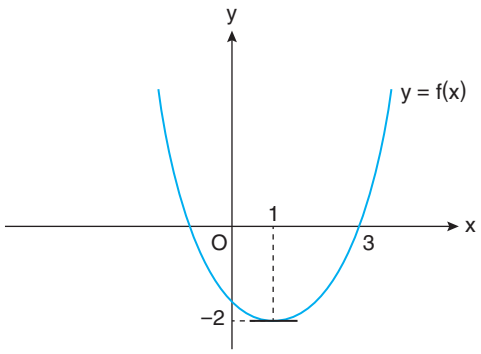
$$y = a(x - r)^2 + k$$

şeklinde ifade edilir.

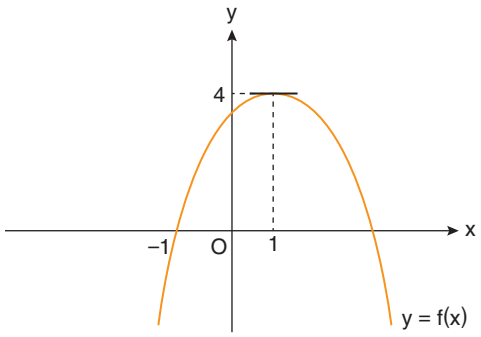
ÖRNEK-4

Aşağıda verilen parabollerin denklemlerini yazınız.

a.

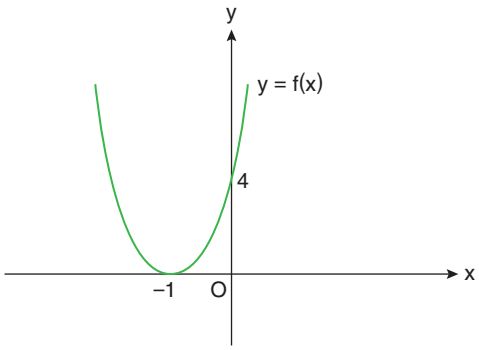


b.



ÖRNEK-5

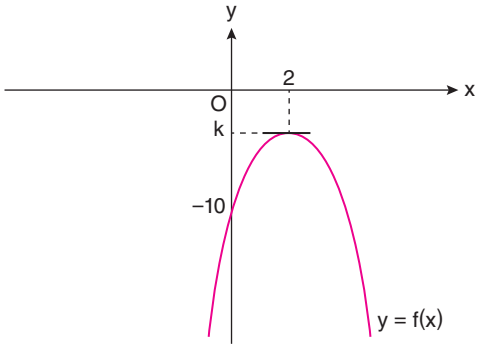
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f(2) değerini bulunuz.

ÖRNEK-6

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$f(1) = -7$

olduğuna göre k değerini bulunuz.

3. Durum

Üç Noktası Bilinen Parabolün Denklemi

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ noktalarından geçen,

$$y = ax^2 + bx + c$$

parabolünün denklemi, bu noktaların denklemde yerine yazılarak a, b ve c katsayılarının elde edilmesiyle bulunur.

ÖRNEK-7

A(0, 4), B(−1, 2) ve C(1, 8) noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.

ÖRNEK-8

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

fonksiyonunun grafiği orijinden, A(1, −4) ve B(−1, 8) noktalarından geçmektedir.

Buna göre f(−2) değerini bulunuz.

ÖRNEK-9

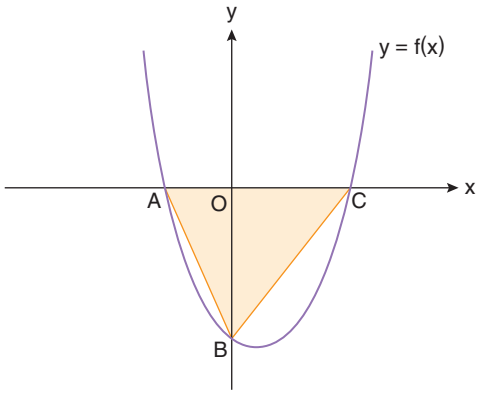
Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ikinci dereceden y = f(x) fonksiyonunun grafiği ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

- x eksenini kestiği noktalardan birinin apsisi 4'tür.
- y eksenini kestiği noktanın ordinatı −4'tür.
- $\left(1, -\frac{9}{2}\right)$ noktasından geçmektedir.

Buna göre fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği diğer noktanın apsisini bulunuz.

ÖRNEK-10

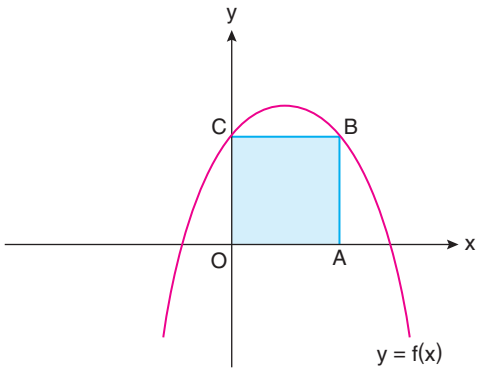
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 4x - 12$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-11

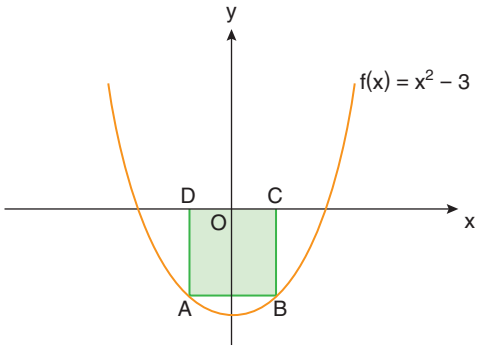
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = -x^2 + 7x + 7$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre OABC karesinin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-12

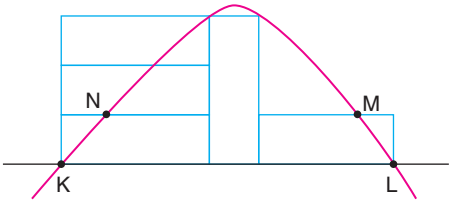
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre ABCD karesinin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-13

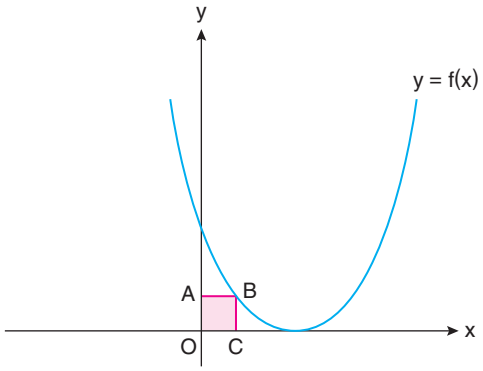
Aşağıda verilen KL doğrusunun üzerine uzun kenarlarının uzunluğu 3 birim olan 5 eş dikdörtgen ve K, N, M, L noktalarından geçen parabol çizilmiştir.



Buna göre N noktasının M noktasına uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-14

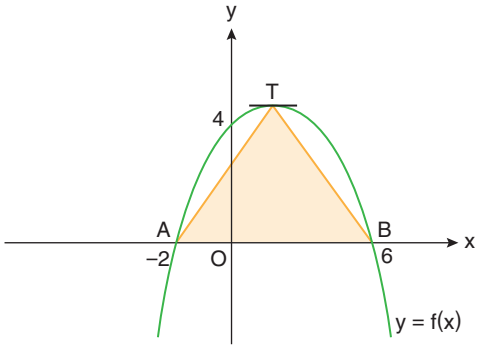
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 12x + 36$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre OABC karesinin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-15

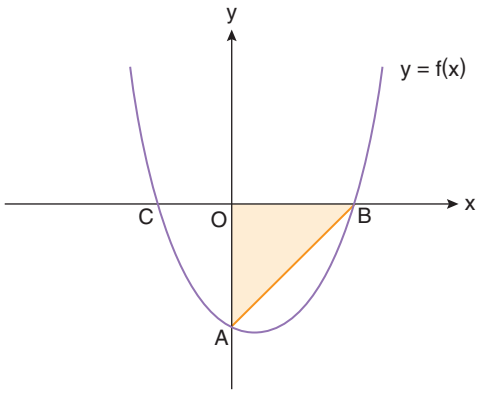
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



T, parabolün tepe noktası olduğuna göre ATB üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-16

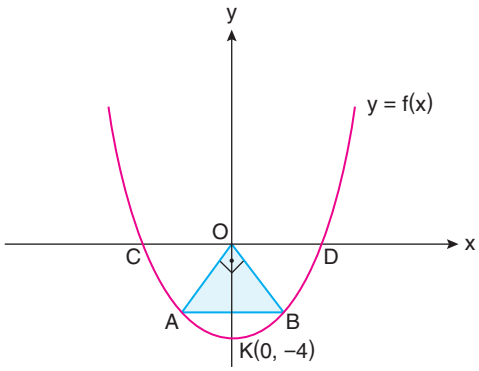
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 + bx - 6$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



OAB üçgeninin alanı 18 birimkare olduğuna göre C noktasının apsisini bulunuz.

ÖRNEK-17

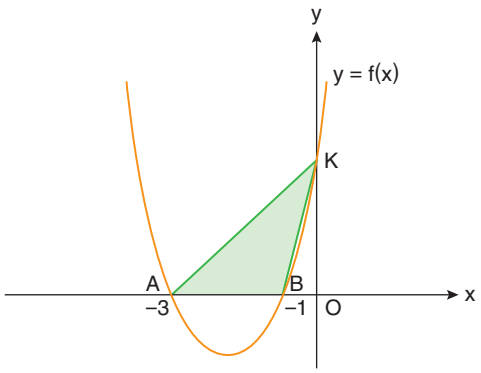
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



[AB] // [CD], [OA] ⊥ [OB], f fonksiyonunun tepe noktası K(0, –4) ve Alan($\widehat{OAB}$) = 4 birimkare olduğuna göre y = f(x) parabolünün denklemini bulunuz.

ÖRNEK-18

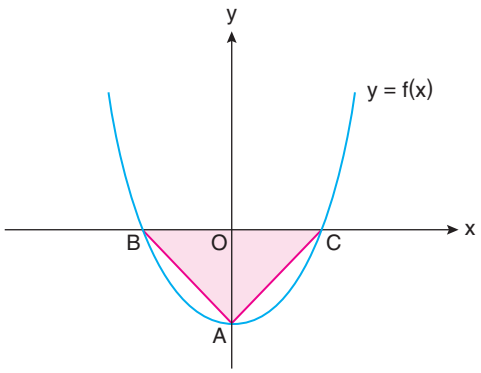
Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Fonksiyonun en küçük değeri –1 olduğuna göre ABK üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-19

Tepe noktası y ekseni üzerinde olan y = f(x) parabolü aşağıda gösterilmiştir.



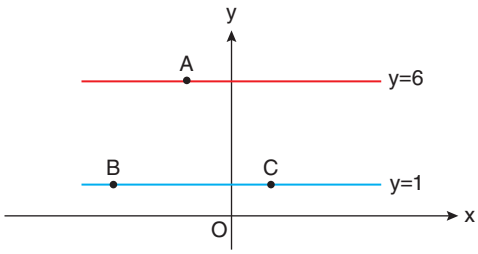
ABC eşkenar üçgeninin alanı $4\sqrt{3}$ birimkare olduğuna göre y = f(x) parabolünün denklemini bulunuz.

ÖRNEK-20

a, b ve c gerçel sayılar olmak üzere,

$y = ax^2 + bx + c$

parabolü y = 1 doğrusuyla B ve C noktalarında, y = 6 doğrusuyla ise sadece A noktasında kesişmektedir. Dik koordinat düzleminde A, B ve C noktalarının yerleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Buna göre a, b ve c sayılarının işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) +, –, – B) +, +, – C) –, +, + D) –, +, – E) –, –, +

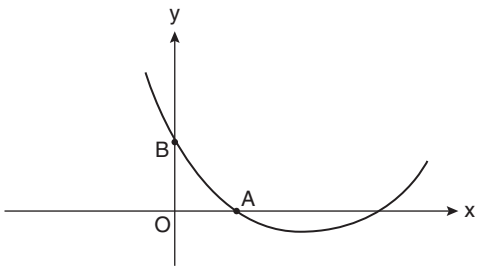
(2020-AYT)

ÖRNEK-21

$0 < x_1 < x_2$ olmak üzere, gerçel sayılar kümesi üzerinde

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonunun belirttiği parabol, dik koordinat düzleminde eksenleri şekildeki gibi farklı A ve B noktalarında kesmektedir.



A ve B noktalarının orijine uzaklıkları eşit olup, $x = \frac{3}{5}$ iken bu parabol en küçük değerini almaktadır.

Buna göre, $\frac{x_2}{x_1}$ oranı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(2019-AYT)

ÖRNEK-22

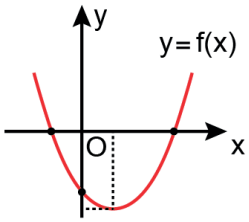
a, b ve c gerçel sayıları için $a \cdot b \cdot c > 0$ olmak üzere, gerçel sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu

$f(x) = ax^2 + bx + c$

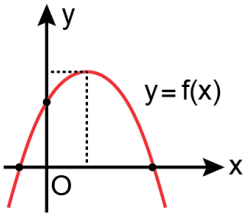
biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, f fonksiyonunun grafiği

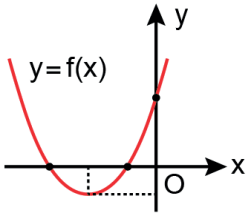
I.



II.



III.



grafiklerinden hangileri olabilir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

(2023-AYT)

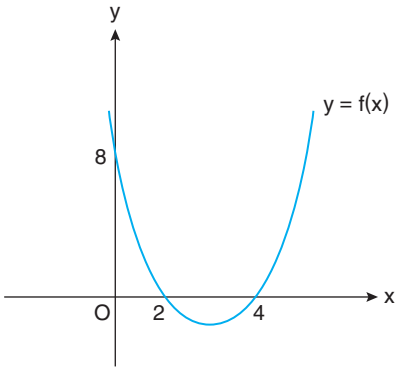
ÖRNEK-23

Dik koordinat düzleminde gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı,

$f(x) = x^2 + (a + 1)x - 2$

fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktalardan biri (1, 3) aralığında olduğuna göre a gerçel sayısının hangi aralıkta olması gerektiğini bulunuz.

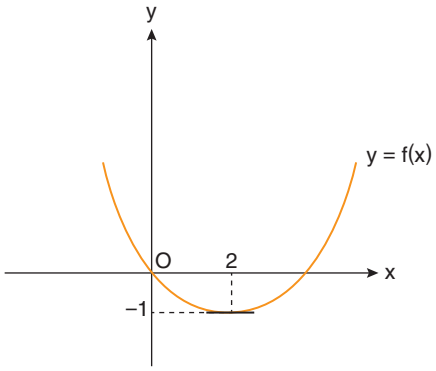
1. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ikinci dereceden f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f(3) değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $-\frac{3}{2}$ D) -2 E) $-\frac{5}{2}$

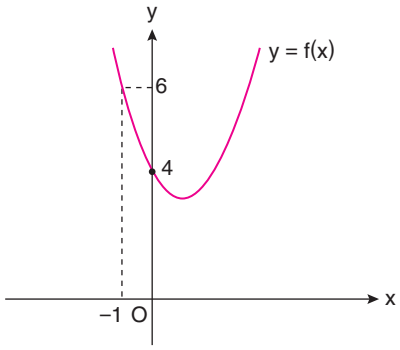
2. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ikinci dereceden f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f(−2) değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5

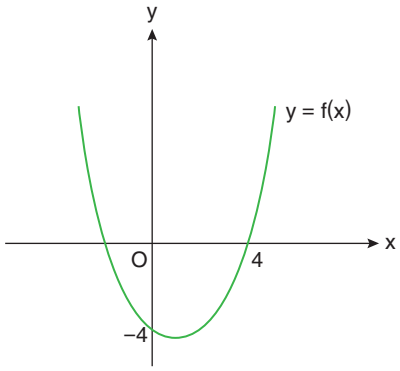
3. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ikinci dereceden f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



f(1) = 4 olduğuna göre f(2) değeri kaçtır?

A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) 6 E) 7

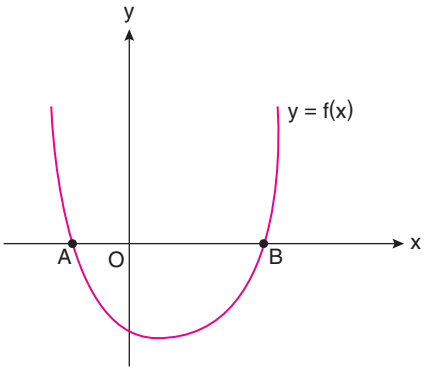
4. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 + ax + b$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f fonksiyonunun tepe noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{9}{4}$

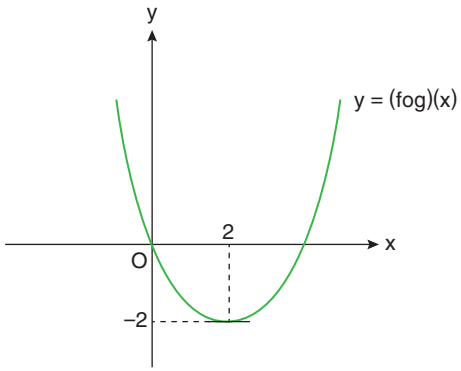
5. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 4x + k$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



|OB| = 3|OA| olduğuna göre k değeri kaçtır?

A) −6 B) −9 C) −12 D) −15 E) −18

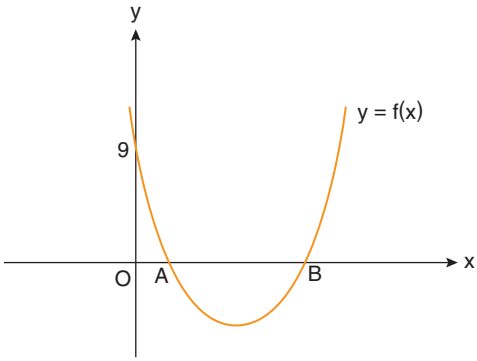
6. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ikinci dereceden y = (fog)(x) fonksiyonunun grafiği olan parabol verilmiştir.



f(x) = x + k ve g(1) = −1 olduğuna göre k değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

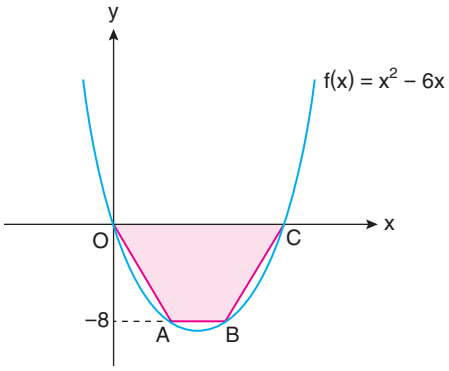
7. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = ax^2 - 4ax + b$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



|AB| = 2 birim olduğuna göre a · b çarpımı kaçtır?

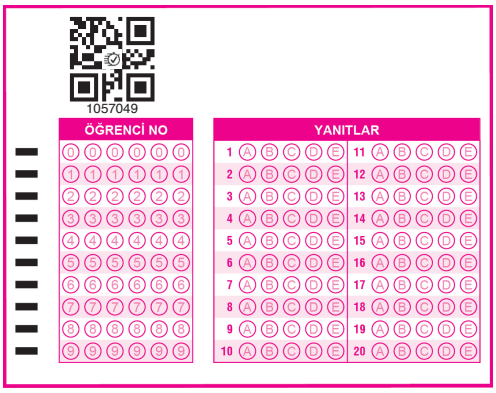
A) 15 B) 18 C) 20 D) 24 E) 27

8. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 6x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre OABC yamuğunun alanı kaç birimkaredir?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 40 E) 48



Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumu

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun birbirine göre durumunu bulmak için iki denklem eşitlenir.

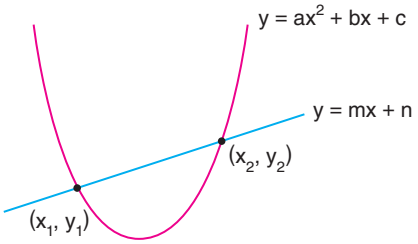
$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

$$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$$

denklemi elde edilir.

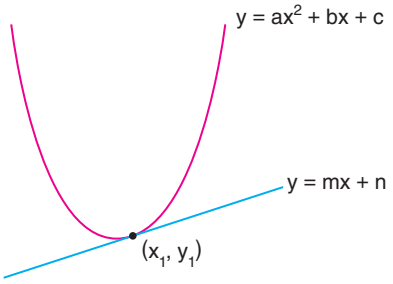
Bu denklemin diskriminantı (Δ) olmak üzere

$\Delta > 0$ ise doğru ile parabol iki noktada kesişir.



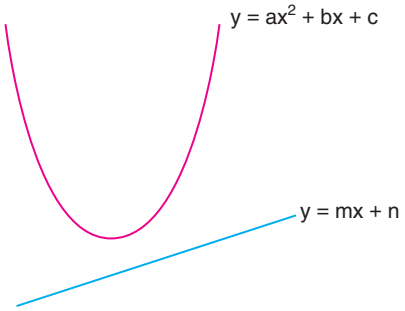
x_1 ve x_2 değerleri kesişim noktasının apsisleridir.

$\Delta = 0$ ise doğru parabole teğettir.



x_1 değeri, kesim noktasının apsisidir.

$\Delta < 0$ ise doğru ile parabol kesişmez.



ÖRNEK-24

$y = x^2 - 2x - 2$

parabolü ile y = x + 8 doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

ÖRNEK-25

$y = x^2 + 5x - 4$

parabolü ile y = ax + b doğrusunun kesim noktalarının apsisleri toplamı 2 olduğuna göre a değerini bulunuz.

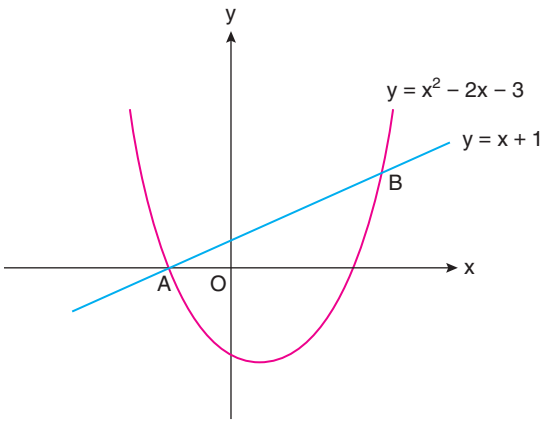
ÖRNEK-26

$y = x^2 - x + 1$

parabolü ile y = 3x + 2 doğrusunun kesim noktasının ordinatları toplamını bulunuz.

ÖRNEK-27

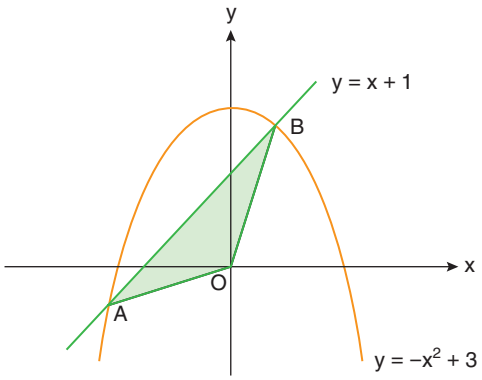
Aşağıda $y = x^2 - 2x - 3$ parabolü ile $y = x + 1$ doğrusunun grafiği verilmiştir.



Buna göre |AB| nun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-28

Aşağıda $y = -x^2 + 3$ parabolü ile $y = x + 1$ doğrusunun grafiği verilmiştir.



Buna göre AOB üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖRNEK-29

Dik koordinat düzleminde $y = x^2 - ax + 2$ parabolü ile $y = x - 2$ doğrusu iki farklı noktada kesişmektedir.

Buna göre a'nın <u>en küçük</u> pozitif tam sayı değerini bulunuz.

ÖRNEK-30

$y = -x^2 + 3x + 1$

parabolü ile $y = -x + a$ doğrusu birbirine teğettir.

Buna göre a değerini bulunuz.

ÖRNEK-31

$y = x^2 - 6x + k + 1$

parabolü y = 2 doğrusuna teğet olduğuna göre k değerini bulunuz.

DİFnot

Bir parabole başlangıç noktasından çizilen teğetler birbirine dik ise $\Delta = -1$, x ekseni kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise $\Delta = 1$ olur.

ÖRNEK-32

$y = x^2 - mx + 4$

parabolüne başlangıç noktasından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre m'nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÖRNEK-33

$y = x^2 - 3x + 4$

parabolü ile $y = x + 2$ doğrusu A(a, b) noktasına göre simetrik iki noktada kesişmektedir.

Buna göre a · b çarpımını bulunuz.

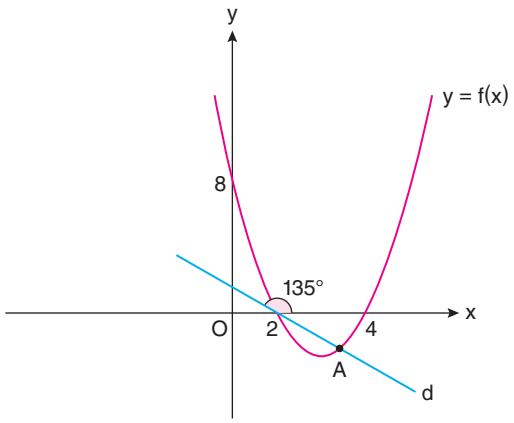
ÖRNEK-34

$y = x^2 - x + 5$

parabolünün $x - y + 1 = 0$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarının toplamını bulunuz.

ÖRNEK-35

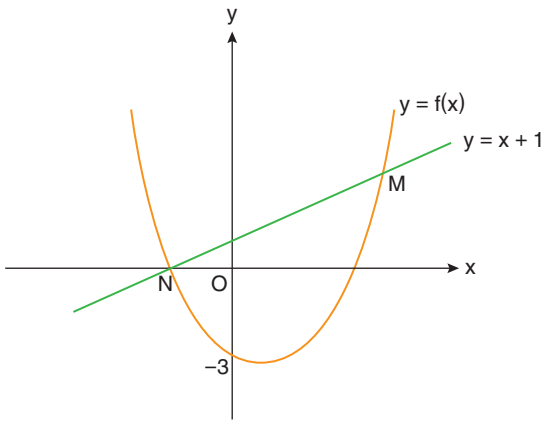
Aşağıda y = f(x) parabolü ile d doğrusunun grafiği verilmiştir.



Buna göre A noktasının ordinatını bulunuz.

ÖRNEK-36

Aşağıda y = f(x) parabolü ile y = x + 1 doğrusunun grafiği verilmiştir.



Parabolün tepe noktasının apsisi 1 olduğuna göre M noktasının apsisini bulunuz.

İki Parabolün Birbirine Göre Durumu

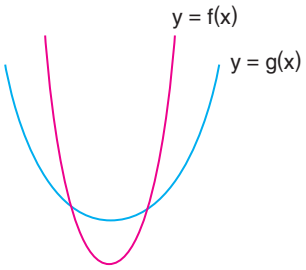
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = g(x) = kx^2 + mx + n$ parabolünün kesişip kesişmediğini belirlemek için ortak çözüm yapılır.

$f(x) = g(x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = kx^2 + mx + n$

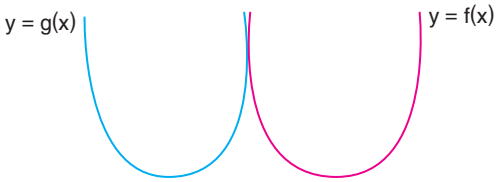
$\Rightarrow (a - k)x^2 + (b - m)x + c - n = 0$

$a - k \neq 0$ ise Δ'ya bakılır.

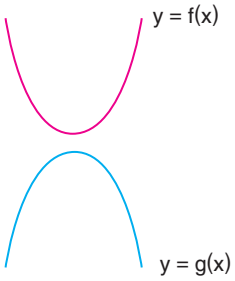
$\Delta > 0$ ise paraboller farklı iki noktada kesişir.



$\Delta = 0$ ise paraboller teğettir.



$\Delta < 0$ ise paraboller kesişmez.



- $a - k = 0$ ve $b - m \neq 0$ ise paraboller bir noktada kesişir.
- $a - k = 0$, $b - m = 0$ ve $c - n = 0$ ise paraboller çakışıktır.

ÖRNEK-37

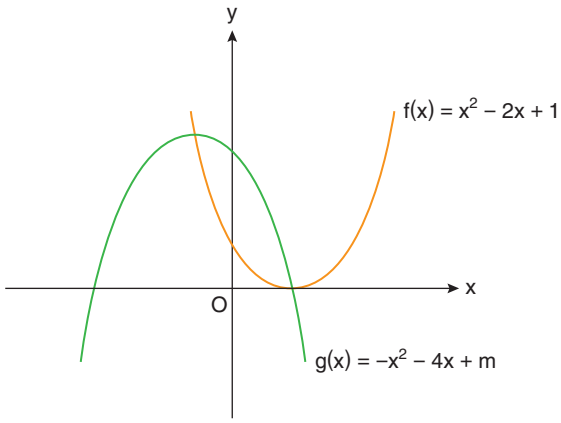
$y = 2x^2 + 3x + 1$

$y = x^2 + x + m$

parabollerinin kesim noktalarının apsisleri toplamını bulunuz.

ÖRNEK-38

Dik koordinat düzleminde gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonu ile $g(x) = -x^2 - 4x + m$ fonksiyonlarının grafikleri birbirlerini tepe noktalarında kesmektedir.



Buna göre g(–1) değerini bulunuz.

ÖRNEK-39

Dik koordinat düzleminde, $y = 3x^2 - x + k$ parabolü ile $y = x^2 - mx + 1$ parabolünün kesim noktalarının apsisler toplamı ile apsisler çarpımı eşittir.

Buna göre k + m toplamını bulunuz.

1. Dik koordinat düzleminde,

$y = x^2 - x + 1$

parabolü ile $y = x + k$ doğrusu iki farklı noktada kesişmektedir.

Buna göre k'nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

2. Dik koordinat düzleminde,

$y = x^2 + 4x + k$

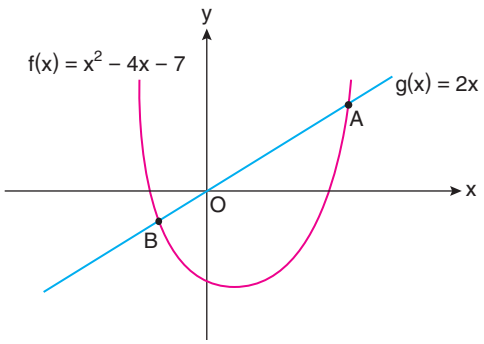
$y = 2x^2 - 2x - k$

parabolleri birbirlerine teğettir.

Buna göre k değeri kaçtır?

A) $-\frac{9}{2}$ B) –4 C) $-\frac{7}{2}$ D) –3 E) $-\frac{5}{2}$

3. Dik koordinat düzleminde gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı, $f(x) = x^2 - 4x - 7$ fonksiyonu ile $g(x) = 2x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Buna göre |AB| kaç birimdir?

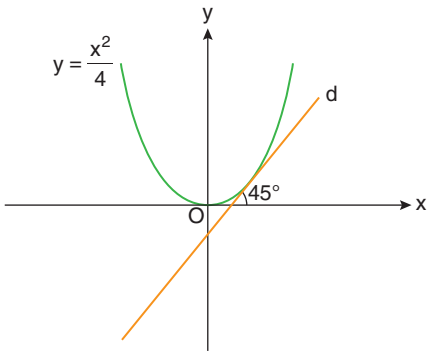
A) $4\sqrt{5}$ B) 8 C) $8\sqrt{5}$ D) 16 E) $16\sqrt{5}$

4. $y = x^2 - 3x + 1$

parabolünün $y = x - 5$ doğrusuna en yakın noktasının apsisi kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

5. Dik koordinat düzleminde x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapan d doğrusu $y = \frac{x^2}{4}$ parabolüne teğettir.



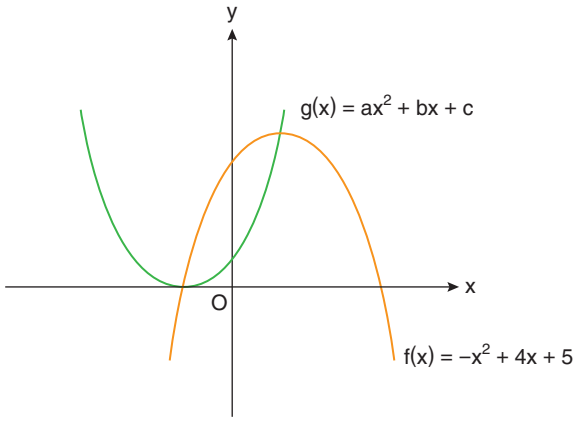
Buna göre d doğrusunun x eksenini kestiği noktanın apsisi kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

6. **Dik koordinat düzleminde $y = x^2$ parabolü ile $y = x + 2$ doğrusu arasında kalan bölgenin sınırları üzerindeki (x, y) noktaları için $x^2 + y^2$ toplamı en çok kaçtır?**

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

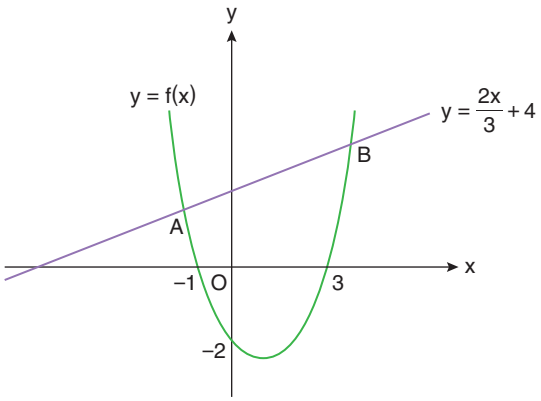
7. Dik koordinat düzleminde, $y = -x^2 + 4x + 5$ parabolü ile $g(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği birbirlerini tepe noktalarında kesmektedir.



Buna göre g(3) değeri kaçtır?

A) 4 B) 9 C) 16 D) 25 E) 36

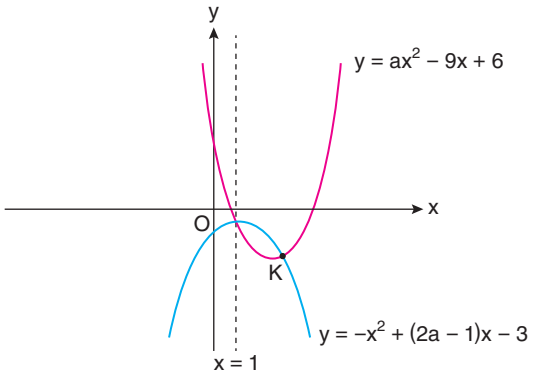
8. Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu ile $y = \frac{2x}{3} + 4$ doğrusunun grafiği verilmiştir.



Buna göre A ve B noktalarının koordinatlarının toplamı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

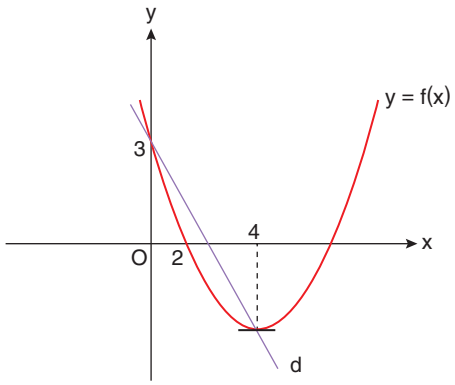
9. Dik koordinat düzleminde $y = ax^2 - 9x + 6$ parabolü ile $y = -x^2 + (2a - 1)x - 3$ parabolü $x = 1$ doğrusu üzerinde kesişmektedir.



Buna göre a değeri kaçtır?

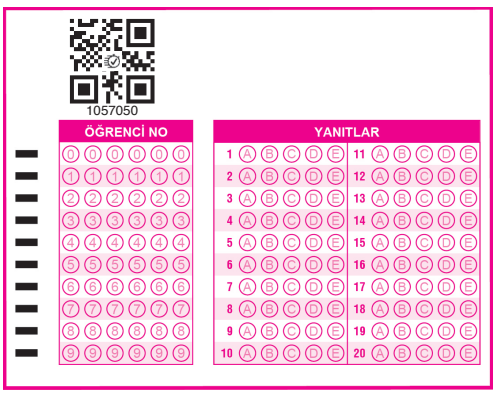
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

10. Dik koordinat düzleminde d doğrusu, $y = f(x)$ parabolünün tepe noktasından geçmektedir.



Buna göre d doğrusunun eğimi kaçtır?

A) $-\frac{5}{2}$ B) −2 C) $-\frac{3}{2}$ D) −1 E) $-\frac{1}{2}$



Parabolün Eksenlere Göre Simetriği

✓ Parabolün x eksenine göre simetriğinin denklemi,

$y = f(x)$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriği olan

$y = -f(x)$ fonksiyonudur.

Bu durumda $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün x eksenine göre simetriği,

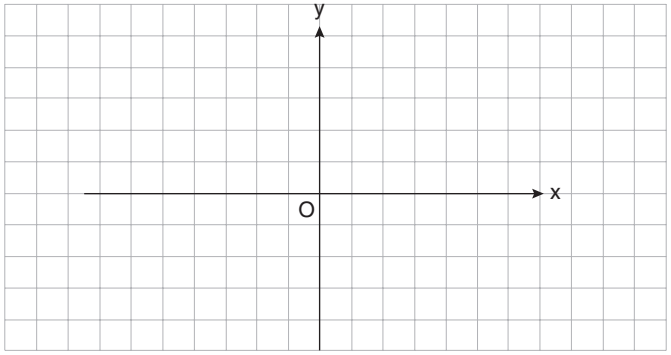
$$y = -(ax^2 + bx + c)$$

$$y = -ax^2 - bx - c \text{ olur.}$$

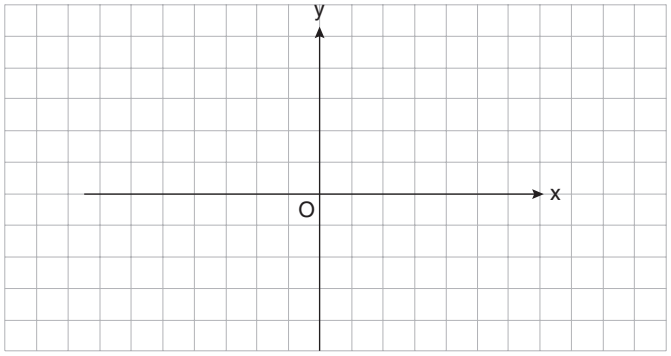
ÖRNEK-40

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonların x eksenine göre simetriklerini çiziniz.

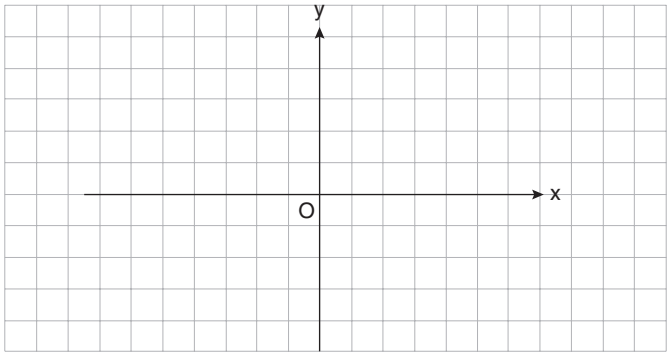
a. $f(x) = x^2 + 1$



b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$



c. $f(x) = (x + 2)^2$



✓ Parabolün y eksenine göre simetriğinin denklemi,

$y = f(x)$ fonksiyonunun y eksenine göre simetriği olan

$y = f(-x)$ fonksiyonudur.

Bu durumda $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün y eksenine göre simetriği,

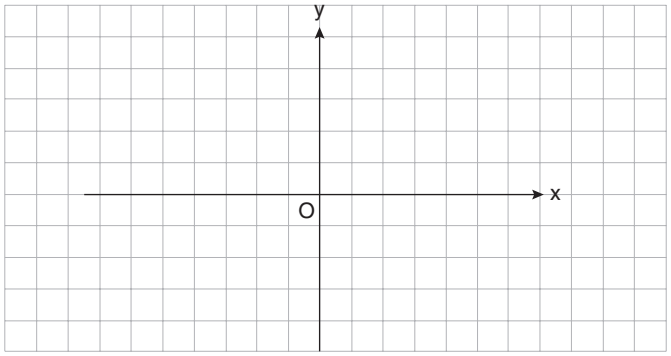
$$y = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

$$y = ax^2 - bx + c \text{ olur.}$$

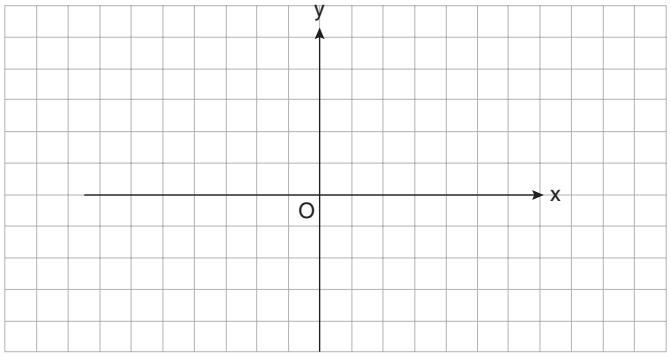
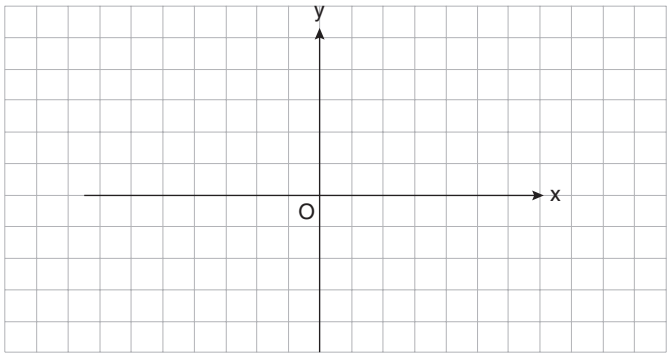
ÖRNEK-41

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonların y eksenine göre simetriklerini çiziniz.

a. $f(x) = x^2 + x$



b. $f(x) = x^2 + 3x - 4$



c. $f(x) = (x + 1)^2$