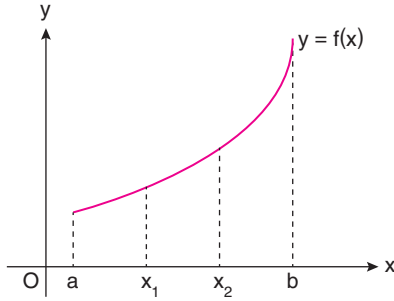


İNTEGRAL - III

ALAN HESAPLAMA



$[a, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu için $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ olmak üzere $a = x_0$ ve $b = x_n$ seçilerek oluşturulan $P\{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının bir **parçalanması** denir.

Burada,

$$\Delta x_1 = |x_1 - x_0|$$

$$\Delta x_2 = |x_2 - x_1|$$

$$\Delta x_3 = |x_3 - x_2|$$

$\vdots$

$$\Delta x_n = |x_n - x_{n-1}|$$

alt aralıkların genişlikleridir.

Eğer bu alt aralıkların genişlikleri eşit ise yani $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_n$ oluyorsa bu parçalanmaya (bölüntüye) **düzgün parçalanma (bölüntü)** denir.

Düzgün parçalanmada $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olur.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde

$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ kümesi $[a, b]$ aralığının düzgün bölüntüsü olmak üzere,

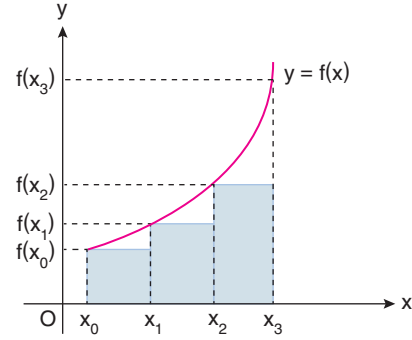
f artan ise

$$f(x_0) \cdot \Delta x_1 + f(x_1) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k$$

f azalan ise

$$f(x_1) \cdot \Delta x_1 + f(x_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

toplamına **Riemann alt toplamı** denir.



$(x_1 - x_0) \cdot f(x_0) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + (x_3 - x_2) \cdot f(x_2)$ ifadesi f fonksiyonunun **Riemann alt toplamıdır**.



ÖRNEK-1

$f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $[1, 4]$ aralığını üç eşit parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulunuz.





ÖRNEK-4

$[1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = x^3$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $[1, 4]$ aralığını üç alt aralığa bölerek,

a. Riemann alt toplamını bulunuz.

b. Riemann üst toplamını bulunuz.

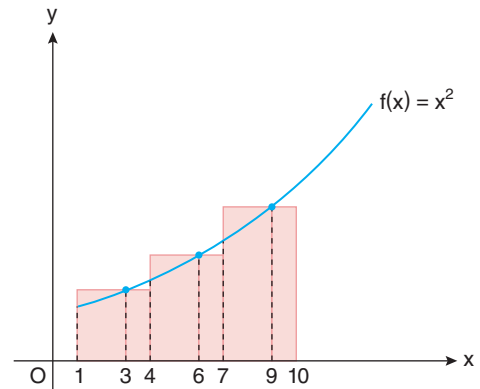
[illegible]

c. Her alt aralığın orta noktasına göre hesaplanan Riemann toplamını bulunuz.



ÖRNEK-5

Aşağıda $[1, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Grafikte $[1, 10]$ aralığı eşit üç alt aralığa bölünmüş Riemann toplamını her alt aralıkta verilen değere göre bulunuz.



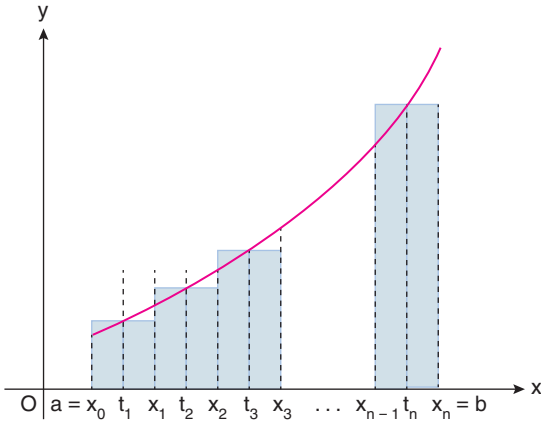
ÖRNEK-6

$f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2$$

fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı iki eşit parçaya bölen P parçalanması yapılıyor.

Buna göre oluşan Riemann alt toplamının Riemann üst toplamına oranını bulunuz.



f fonksiyonunda $[a, b]$ aralığı n tane eşit aralığa bölünsün.

$$\begin{aligned} t_1 &\in [x_0, x_1] \\ t_2 &\in [x_1, x_2] \\ &\vdots \\ t_n &\in [x_{n-1}, x_n] \end{aligned}$$

ve alt aralıkların genişliği $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında hesaplanan Riemann toplamı A ise $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alan yaklaşık olarak,

$$A = \Delta x \cdot f(t_1) + \Delta x \cdot f(t_2) + \dots + \Delta x \cdot f(t_n) = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(t_k)$$

şeklinde ifade edilir.

$[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun altında kalan $[a, b]$ aralığının daha fazla alt aralığa bölünmesi durumunda daha yakın değerler verilecektir. Bu durumda Riemann toplamı n 'nin sonsuza yaklaşması durumunda f fonksiyonu ile x eksenı arasında kalan alanı vereceğinden bu alan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(t_k)$$

limiti ile hesaplanır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(t_k)$$

değerine f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli integrali denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(t_k) = \int_a^b f(x) dx$$

olur.

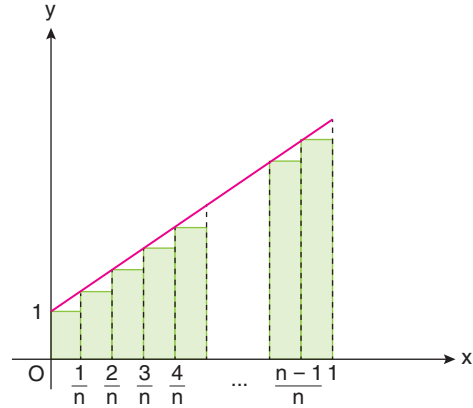


ÖRNEK-7

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = x + 1$$

fonksiyonunun grafiği ile x eksenı arasında kalan bölgenin alanı Riemann alt toplamı ile aşağıdaki gibi bulunur.



Öncelikle $[0, 1]$ aralığı n eşit aralığa bölündü.

$$\text{Dikdörtgenlerin alanı} = \frac{1}{n} \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n} + \dots + \frac{2n-1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n + n + 1 + n + 2 + \dots + 2n - 1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n \cdot (3n - 1)}{2} \right)$$

$$= \frac{3n - 1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \right] = \frac{3}{2} = \int_0^1 (x + 1) dx$$

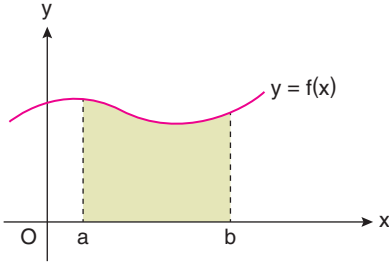
İntegral ile Alan Bulma

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyonunun grafiği ile $x = a$, $x = b$ doğruları ve x eksenini arasında kalan sınırlı bölgenin alanı,

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

integrali ile hesaplanır.

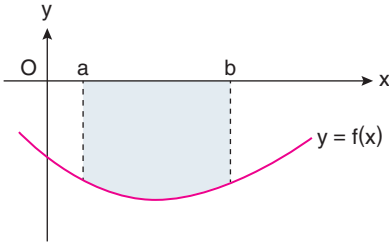
1.



Boyalı bölge, x ekseninin üzerinde olduğundan $|f(x)| = f(x)$ olur. Bu durumda x ekseninin üzerinde kalan bölgenin alanı,

$$\int_a^b f(x) dx \text{ olur.}$$

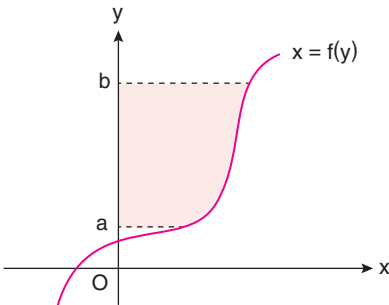
2.



Boyalı bölge, x ekseninin altında olduğundan $|f(x)| = -f(x)$ olur. Bu durumda x ekseninin altında kalan bölgenin alanı,

$$\int_a^b -f(x) dx \text{ olur.}$$

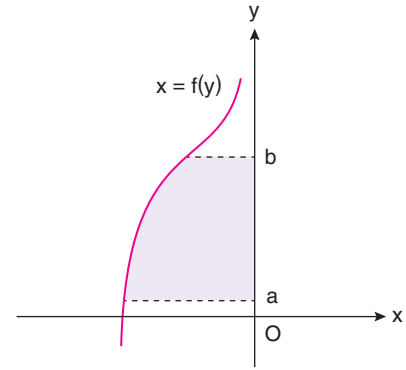
3.



Boyalı bölge, y ekseninin sağında olduğundan $|f(y)| = f(y)$ olur. Bu durumda y ekseninin sağında kalan bölgenin alanı,

$$\int_a^b f(y) dy \text{ olur.}$$

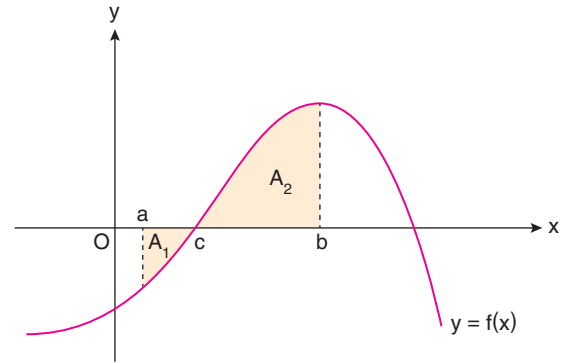
4.



Boyalı bölge, y ekseninin solunda olduğundan $|f(y)| = -f(y)$ olur. Bu durumda y ekseninin solunda kalan bölgenin alanı,

$$\int_a^b -f(y) dy \text{ olur.}$$

5. Aşağıdaki şekilde f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında hem pozitif hem de negatif değerlidir.



$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & a \leq x < c \\ f(x), & c < x \leq b \end{cases}$$

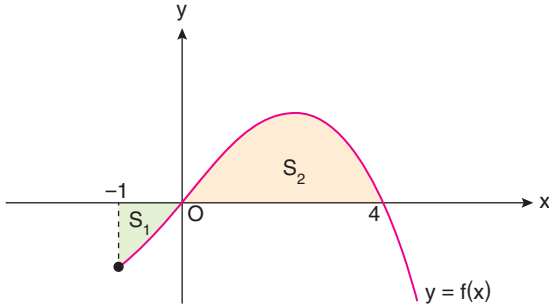
olduğundan f fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ değerleri ile x eksenini arasında kalan bölgenin alanı,

$$\begin{aligned} \text{Boyalı alan} &= A_1 + A_2 = \int_a^c -f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ olur.} \end{aligned}$$



ÖRNEK-9

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$S_1 = 3$ birimkare, $S_2 = 7$ birimkare olduğuna göre,

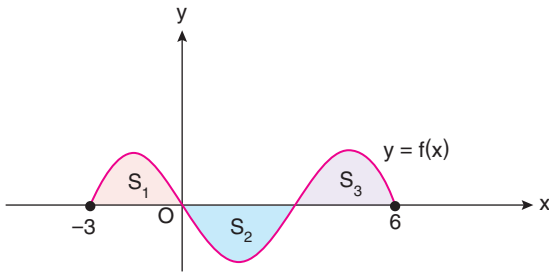
$$\int_{-1}^4 f(x) \, dx$$

integralinin değerini bulunuz.

[illegible]

ÖRNEK-10

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. S_1 , S_2 ve S_3 eğrilerin x eksenine ile arasında kalan bölgelerin alanları olmak üzere,



Buna göre,

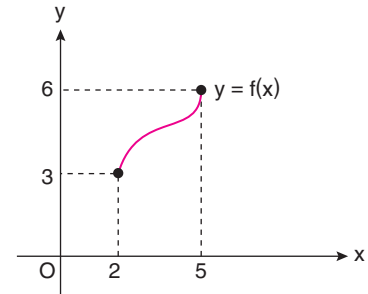
$$\int_{-3}^6 |f(x)| dx - \int_{-3}^6 f(x) dx$$

integralinin değerini S_1 , S_2 ve S_3 cinsinden bulunuz.

[illegible]

ÖRNEK-11

Aşağıda $[2, 5] \rightarrow [3, 6]$, aralığında f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

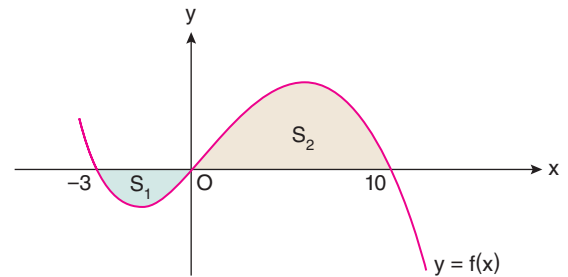
$$\int_2^5 f(x) dx + \int_3^6 f^{-1}(x) dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

[illegible]

ÖRNEK-12

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$$S_2 = 6S_1 \text{ ve } \int_{-3}^{10} f(x) dx = 20$$

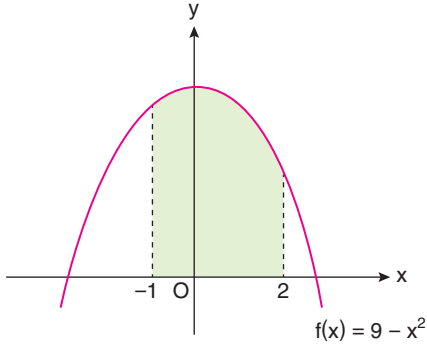
olduğuna göre $\int_{-3}^0 f(x) dx$ integralinin değerini bulunuz.

[illegible]

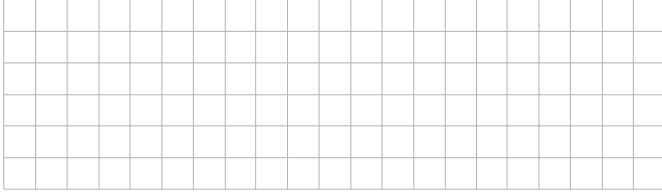


ÖRNEK-13

Aşağıda $f(x) = 9 - x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



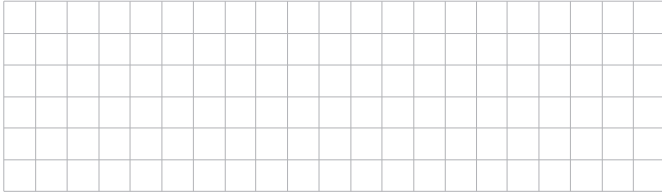
Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



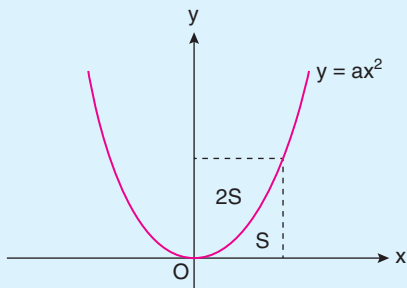
ÖRNEK-14

$$y = x^2 - 4x$$

parabolü, $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları ile x eksenini arasında kalan sınırlı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



DİFnot

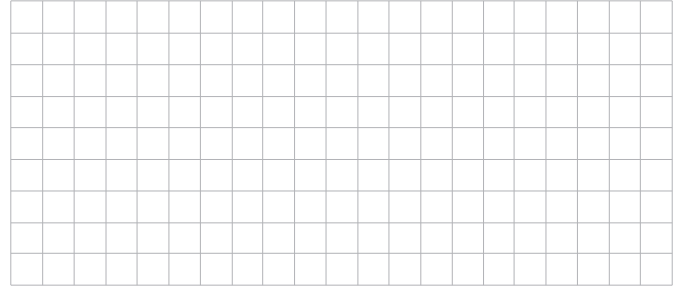


olduğuna dikkat edilmelidir.



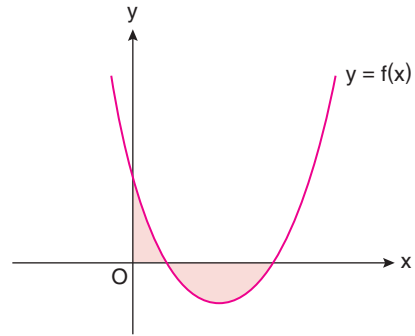
ÖRNEK-15

Dik koordinat sisteminde $y = x^2$ eğrisi, $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları ile x eksenini arasında kalan sınırlı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



ÖRNEK-16

Aşağıda $f(x) = x^2 - 6x + 5$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



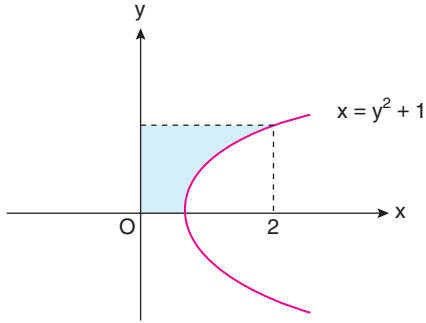
Buna göre boyalı bölgelerin alanları toplamının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



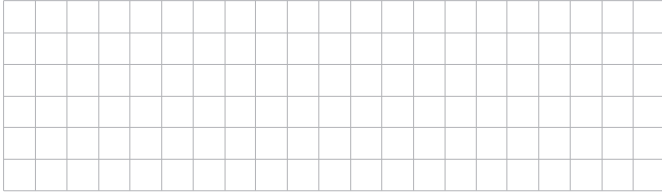


ÖRNEK-17

Aşağıda $x = y^2 + 1$ eğrisi verilmiştir.

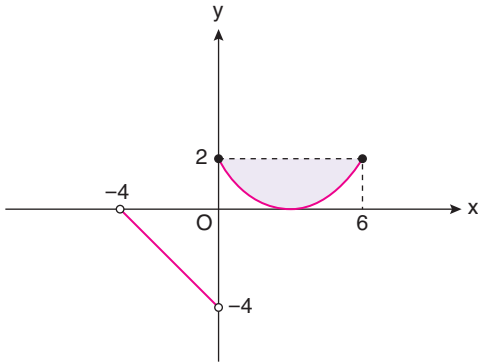


Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



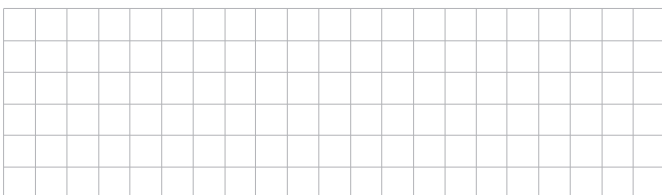
ÖRNEK-18

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



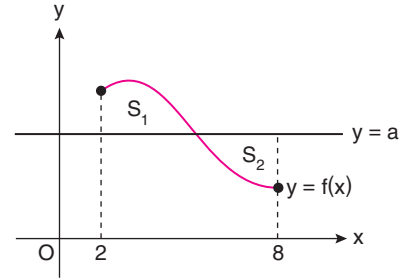
Boyalı bölgenin alanı 7 birimkare olduğuna göre

$\int_{-4}^6 f(x) dx$ integralinin değerini bulunuz.



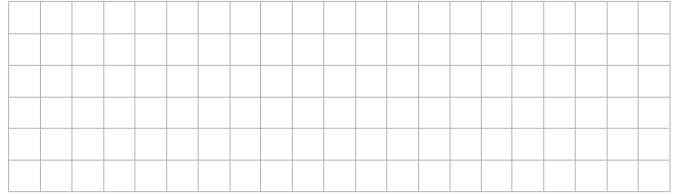
ÖRNEK-19

Aşağıdaki dik koordinat sisteminde $[2, 8]$ aralığında f fonksiyonunun grafiği ile $y = a$ doğrusunun grafiği verilmiştir.



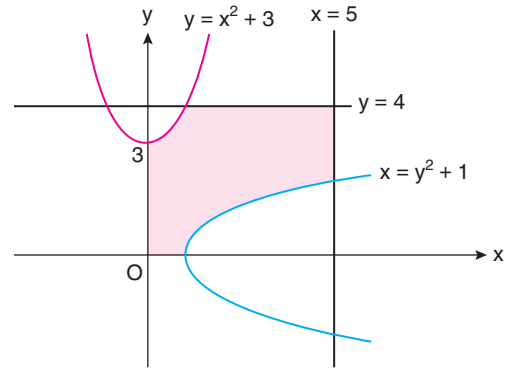
$S_2 - S_1 = 4$ birimkare, $\int_1^4 f(2x) dx = 18$

olduğuna göre a değerini bulunuz.

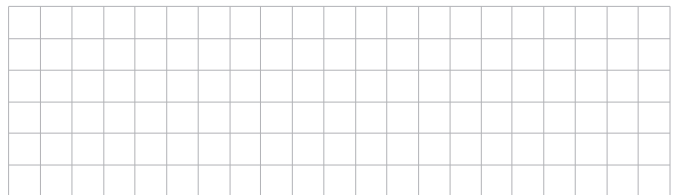


ÖRNEK-20

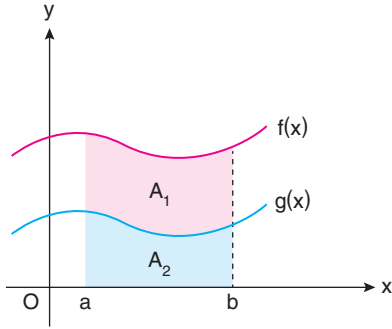
Dik koordinat sisteminde $x = 5$ doğrusu, $y = 4$ doğrusu, $y = x^2 + 3$ parabolü ile $x = y^2 + 1$ eğrisi verilmiştir.



Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



İki Fonksiyonun Grafiği Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanı



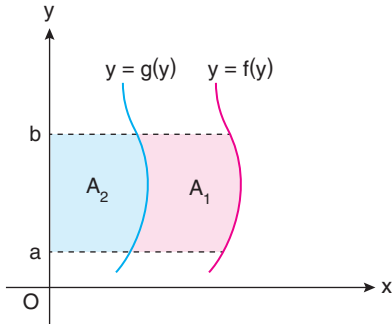
$$A_1 + A_2 = \int_a^b f(x) dx$$

$$A_2 = \int_a^b g(x) dx$$

olduğundan,

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

olur.



$$A_1 + A_2 = \int_a^b f(y) dy$$

$$A_2 = \int_a^b g(y) dy$$

olduğundan,

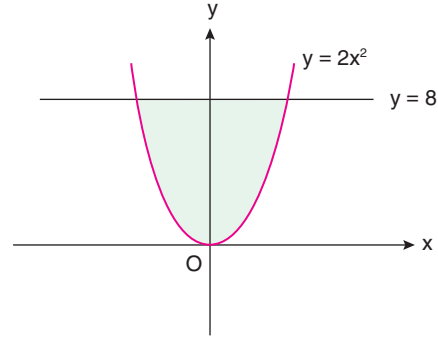
$$A_1 = \int_a^b f(y) dy - \int_a^b g(y) dy = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy$$

olur.

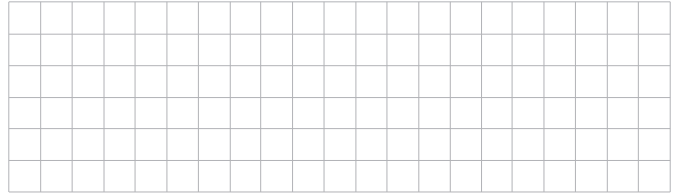


ÖRNEK-21

Aşağıda $y = 2x^2$ parabolü ile $y = 8$ doğrusu verilmiştir.

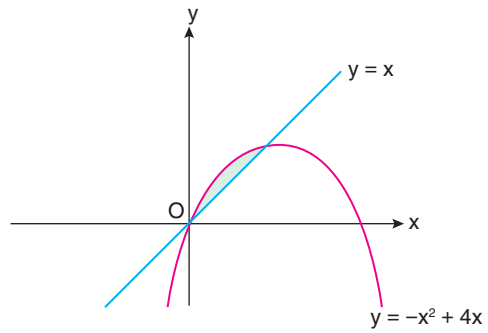


Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

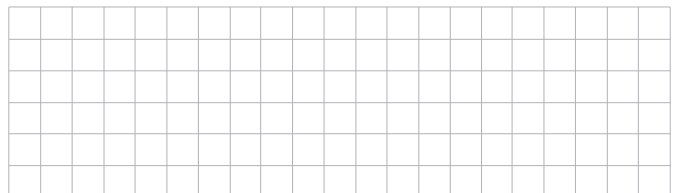


ÖRNEK-22

Aşağıda $y = -x^2 + 4x$ parabolü ile $y = x$ doğrusu verilmiştir.



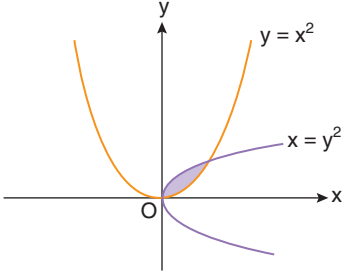
Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



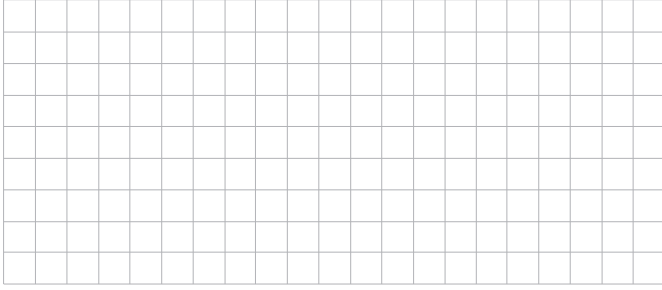


ÖRNEK-23

Aşağıda $y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri verilmiştir.

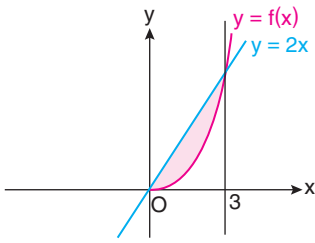


Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

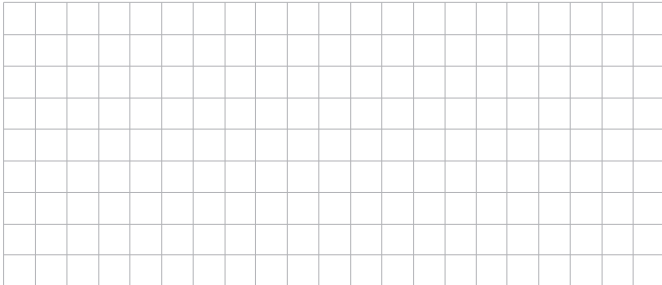


ÖRNEK-24

Aşağıda f fonksiyonu, $y = 2x$ doğrusu ile $x = 3$ doğruları verilmiştir.

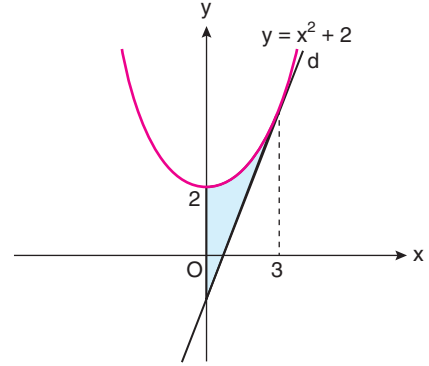


Buna göre boyalı bölgenin alanının $f^{-1}(x)$ türünden eşitliğini yazınız.



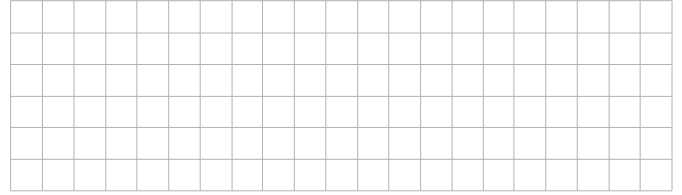
ÖRNEK-25

Aşağıda $y = x^2 + 2$ parabolü ile d doğrusu verilmiştir.



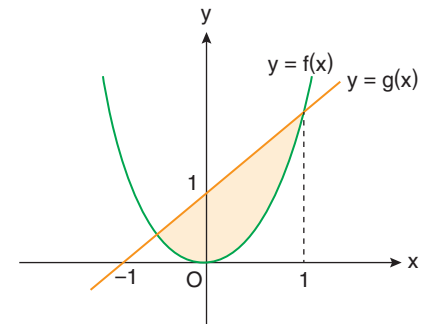
d doğrusu, $x = 3$ apsisi noktasında $y = x^2 + 2$ parabolüne teğettir.

Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

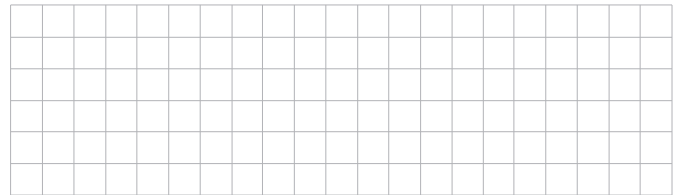


ÖRNEK-26

Aşağıda $y = f(x)$ parabolü ile $y = g(x)$ doğrusu verilmiştir.



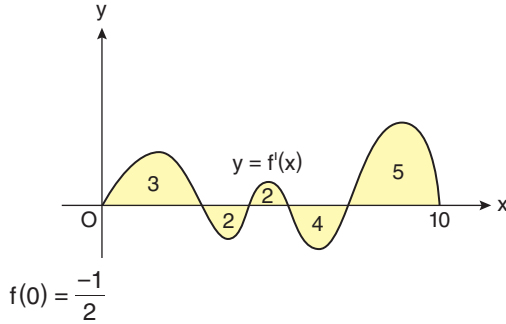
Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.





ÖRNEK-31

Dik koordinat düzleminde, f fonksiyonunun türevi olan f' fonksiyonunun grafiğinin $[0, 10]$ kapalı aralığındaki görünümü verilmiştir. Bu grafikte x ekseninde kalan bölgelerin alanları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



olduğuna göre, $[0, 10]$ aralığında f fonksiyonunun kaç farklı kökü vardır?

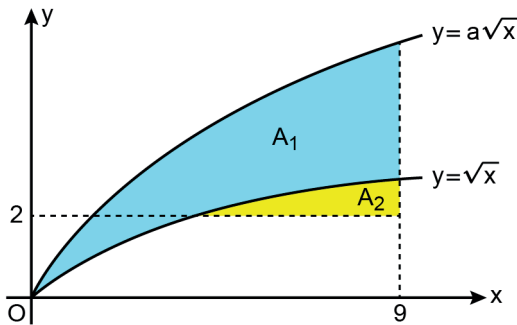
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(2021-AYT)



ÖRNEK-32

a bir gerçel sayı olmak üzere dik koordinat düzleminde $y = a\sqrt{x}$ ve $y = \sqrt{x}$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Mavi boyalı bölgenin alanı A_1 , sarı boyalı bölgenin alanı A_2 olmak üzere

$$A_1 \cdot A_2 = 96$$

olduğuna göre a kaçtır?

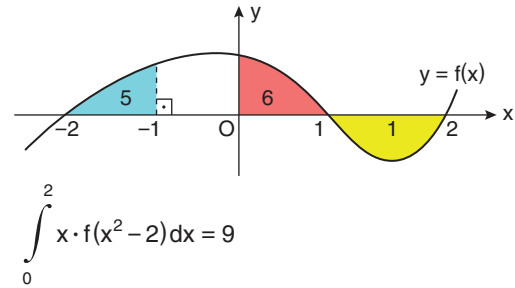
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(2024-AYT)

[illegible]

ÖRNEK-33

Dik koordinat düzleminde verilen f fonksiyonunun grafiği ile x -ekseni arasında kalan alan dört bölgeye ayrıldıktan sonra üç bölge şeklindeki gibi boyanmıştır. Mavi bölgenin alanı 5, kırmızı bölgenin alanı 6 ve sarı bölgenin alanı 1 birimkaredir.



olduğuna göre, $\int_{-1}^0 f(x) dx$ integralinin değeri kaçtır?

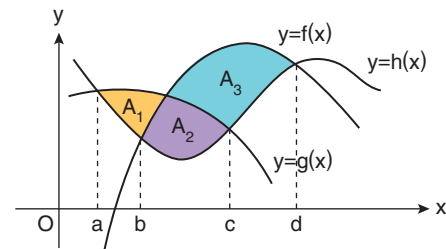
- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

(2022-AYT)

[illegible]

ÖRNEK-34

Dik koordinat düzleminde f , g ve h fonksiyonlarının grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekilde gösterilen boyalı A_1 , A_2 ve A_3 bölgelerinin alanları sırasıyla 1, 3 ve 9 birimkaredir.

Buna göre,

$$\int_a^c (h(x) - g(x)) dx + \int_b^d (f(x) - h(x)) dx$$

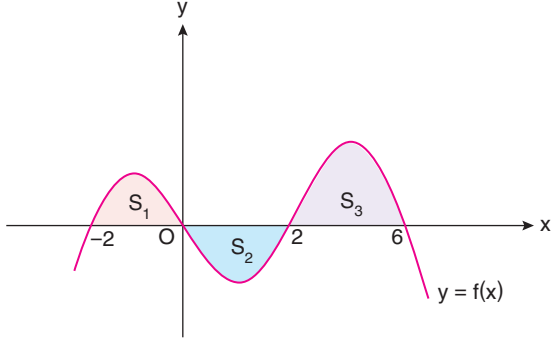
integralinin değeri kaçtır?

- A) 5 B) 8 C) 12 D) 13 E) 17

(2018-AYT)

[illegible]

1. Aşağıda f eğrisinin grafiği verilmiştir.



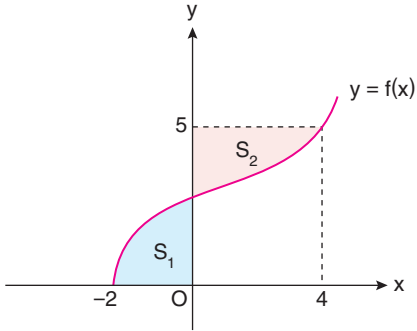
$S_1 = 2$ birimkare, $S_2 = 3$ birimkare, $S_3 = 4$ birimkare olduğuna göre,

$$\int_{-2}^6 f(x) dx$$

integralinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

2. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$S_1 = S_2$ olduğuna göre $\int_{-2}^4 f(x) dx$ integralinin değeri kaçtır?

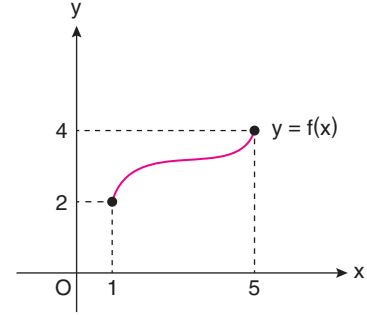
- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

3. $y = 2x - x^2$

parabolü ile x eksenini arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

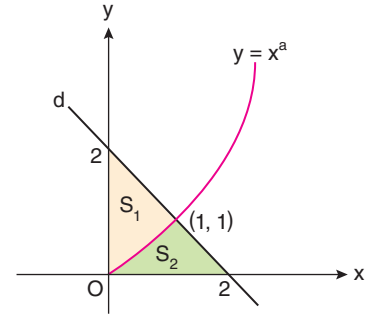
4. Aşağıda $[1, 5]$ aralığında f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre $\int_1^5 f(x) dx + \int_2^4 f^{-1}(x) dx$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

5. Aşağıda verilen $y = x^a$ eğrisi ile d doğrusu $(1, 1)$ noktasında kesişmektedir.



$3S_1 = 5S_2$ olduğuna göre a değeri kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



1057392

ÖĞRENCİ NO	YANITLAR
1 0 0 0 0 0 0	1 A B C D E 11 A B C D E
2 1 1 1 1 1 1	2 A B C D E 12 A B C D E
3 2 2 2 2 2 2	3 A B C D E 13 A B C D E
4 3 3 3 3 3 3	4 A B C D E 14 A B C D E
5 4 4 4 4 4 4	5 A B C D E 15 A B C D E
6 5 5 5 5 5 5	6 A B C D E 16 A B C D E
7 6 6 6 6 6 6	7 A B C D E 17 A B C D E
8 7 7 7 7 7 7	8 A B C D E 18 A B C D E
9 8 8 8 8 8 8	9 A B C D E 19 A B C D E
10 9 9 9 9 9 9	10 A B C D E 20 A B C D E