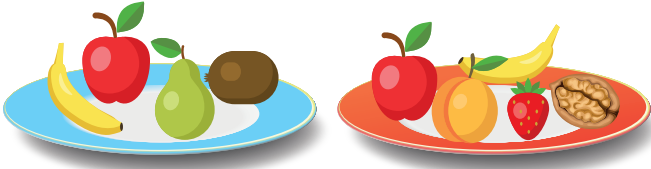


SAYILAR - III (SAYI KÜMELERİ • GERÇEK SAYI ARALIKLARI • ARALIKLARIN MUTLAK DEĞER GÖSTERİMİ)

SAYI KÜMELERİ

- Kümeler A, B, C, ... gibi büyük harflerle isimlendirilirler.
- Kümede her bir eleman küme içine bir defa yazılır, elemanların yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez.



Yukarıda mavi ve kırmızı renkli meyve tabakları içinde bazı meyveler vardır. Mavi renkli meyve tabağının içindeki meyvelerin isimlerinin oluşturduğu kümeyi M ile, kırmızı renkli meyve tabağının içindeki meyvelerin isimlerinin oluşturduğu kümeyi K ile gösterelim.

Kümelerin Eleman Sayısı

- M kümesinin elemanları; elma, armut, muz ve kivi'dir. M kümesinin içinde dört tane meyve olduğundan eleman sayısı 4'tür ve $s(M) = 4$ şeklinde gösterilir.
- K kümesinin elemanları; elma, muz, çilek, şeftali ve cevizdir. S kümesinin içinde beş tane meyve olduğundan eleman sayısı 5'tir ve $s(K) = 5$ şeklinde gösterilir.
- Elma, M kümesinin elemanı olduğundan; "elma M kümesinin elemanıdır." denir ve $\text{elma} \in M$ şeklinde gösterilir.
Armut, K kümesinin elemanı olmadığından; "armut K kümesinin elemanı değildir." denir ve $\text{armut} \notin K$ şeklinde gösterilir.

Kümelerin Gösterilişi

- Bir küme iki farklı şekilde gösterilebilir.
 - Liste yöntemi
 - Ortak özellik yöntemi

Liste Yöntemi

- Liste yönteminde kümeyi oluşturan elemanlar "{ }" şeklinde parantezin içine aralarına virgöl konularak yazılır.

Örneğin;

Elemanları tek rakam olan bir T kümesi liste yöntemi ile

$$T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

biçiminde gösterilir.

- Elemanların yazılışında sıra önemli değildir ve her eleman yalnız bir kez yazılır.
 - $\{4, 3, 1, 2\}$ kümesi ile $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesi aynı kümedir.
 - $\{1, 3, 5, 7, 9, 9\}$ yazımı doğru değildir. Bunun yerine $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ yazılmalıdır.

DİFnot

- Bir kümenin elemanları belli bir düzen içinde sıralanıyor-sa ve eleman sayısı çoksa "..." sembolü kullanılabilir.
Örneğin, doğal sayılar kümesi $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ biçiminde gösterilebilir.
 $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ kümesi ise pozitif tek sayıları belirtir. Bu iki küme sonsuz elemanlıdır.

Örnek 1

Aşağıda liste yöntemi ile verilen kümelerin eleman sayılarını karşılıklarına yazınız.

	Küme Gösterimi	Eleman Sayısı
a.	$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$	
b.	$B = \{5353\}$	
c.	$C = \{11, 22, 33\}$	
d.	$D = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	
e.	$E = \{2, 4, 6, 8, \dots, 24\}$	
f.	$F = \{6, 7, 8, \dots, 18, 19\}$	

DiFnot

- ▶ Bir kümenin eleman sayısını bulmak için virgüllerle ayrılan nesne sayısına bakılmalıdır.
- ▶ Bir küme bir başka kümenin elemanı olabilir.

$A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ kümesi 3 elemanlıdır ve $\{3, 4\} \in A$ olur.

Örnek 2

$$A = \{1, 2, \{1, \{2\}\}, \{1\}\}$$

kümesi veriliyor.

- 1 ____ A
- $\{1, 2\}$ ____ A
- $\{1, \{2\}\}$ ____ A
- $\{1\}$ ____ A
- 2 ____ A

Buna göre yukarıda “----” biçiminde boş bırakılan yerlere “€” veya “£” sembollerini uygun şekilde yerleştiriniz.

Örnek 3

“768 234 019” dokuz basamaklı sayısının çift rakamları ile tanımlanan ifadeyi liste yöntemi ile yazınız.

DiFnot

Her küme liste yöntemi ile yazılamaz. Bir kümenin liste yöntemi ile yazılabilmesi için elemanlarının sayılabilir özellikte olması gerekir.

Örneğin gerçel sayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesi liste yöntemi ile gösterilemez.

DiFnot

Sayılabilirlik, bir kümedeki eleman sayısı ile doğal sayılar arasında bire bir eşleşme kurulabilme durumuna denir.

DiFnot

N: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

 $\mathbb{Z}^+$: Pozitif tam sayılar kümesi

$\mathbb{Z}^-$: Negatif tam sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}'$: İrrasyonel sayılar kümesi

R: Gerçek sayılar kümesi

Örnek 4

Aşağıdaki tabloda bazı sayı kümeleri verilmiştir. Tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

	Sayı Kümeleri	Listeleme Yöntemi
a.	Tam sayılar kümesi	
b.	Doğal sayılar kümesi	
c.	5'in tam katı olan doğal sayılar kümesi	
d.	4'ün tam katı olan tam sayılar kümesi	
e.	Çift rakamlar kümesi	
f.	Tek sayılar kümesi	
g.	Asal rakamlar kümesi	

Boş Küme

- ▶ Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme “ $\emptyset$ ” veya “ $\{\}$ ” sembollerinden biri ile gösterilir.
- ▶ A boş küme ise $s(A) = 0$ olur.
- ▶ $A = \{\emptyset\}$ kümesi boş küme değildir.
 $\emptyset \in A$ ’dır ve $s(A) = 1$ olur.

Örneğin,

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: 6 < x < 8, x \text{ çift sayıdır.}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x + 1 < 0\}$$

kümeleri boş kümedir.

Alt Küme

- ▶ A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de bir elemanı oluyorsa **A kümesi, B kümesinin alt kümesidir.** denir ve “ $A \subset B$ ” veya “ $A \subseteq B$ ” ile gösterilir.
- ▶ Aynı durum **B kümesi A kümesini kapsar.** şeklinde de ifade edilebilir ve “ $B \supset A$ ” veya “ $B \supseteq A$ ” ile gösterilir.
- ▶ A kümesinin en az bir elemanı, B kümesinin elemanı değil ise **A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir.** denir ve “ $A \not\subset B$ ” veya “ $A \not\subseteq B$ ” biçiminde gösterilir.
- ▶ A kümesi B kümesinin alt kümesi ise bu iki kümenin Venn şeması ile gösterimi genellikle aşağıdaki gibidir.

Örnek 10

$$E = \{x \mid x \text{ bir rakamdır.}\}$$

Aşağıdaki kümelerden hangilerinin E evrensel kümesinin bir alt kümesi olduğunu bulunuz.

$$A = \{x: x < 3, x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x: x^2 < 5, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{x: 2 < x < 10, x \text{ tek sayı}\}$$

DiFnot

Herhangi bir A kümesindeki elemanların tümü bir B kümesinin de elemanı ise bu durum A kümesinin B kümesine eşit veya A kümesinin B kümesinin alt kümesi olduğu anlamına gelir.

Eşit Kümeler

- ▶ Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. A ve B kümeleri eşit ise $A = B$ yazılır.
- ▶ A ve B eşit kümeler ise $A \subset B$ ve $B \subset A$ olur.

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$
- ▶ A ve B kümelerinin birbirlerinden farklı en az bir tane elemanları varsa “A ve B kümeleri eşit değildir.” denir ve “ $A \neq B$ ” yazılır.

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Örnek 11

$$A = \{x \mid 0 < x < 6, x \text{ çift sayıdır.}\}$$

$$B = \{x \mid x = 2k, k < 3, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$C = \{x \mid 2 \leq x \leq 4, x \text{ tam sayı}\}$$

kümeleri veriliyor.

A, B ve C kümelerinden hangilerinin eşit kümeler olduğunu belirleyiniz.

Kümelerde İşlemler

Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemleri

A ve B kümeleri verilmiş olsun.

- ▶ A ve B kümelerinin tüm elemanlarından oluşan kümeye **A ve B'nin birleşim kümesi** denir ve " $A \cup B$ " ile gösterilir.
$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ veya } x \in B\}$$
- ▶ A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye **A ve B'nin kesişim kümesi** denir ve " $A \cap B$ " ile gösterilir.
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

DiFnot

Ortak elemanı olmayan kümelere **ayrık kümeler** denir.

A ve B kümeleri ayrık ise $A \cap B = \emptyset$ ve $s(A \cap B) = 0$ olur.

1. $A = \{x: -2 \leq x < 1, x \text{ tam sayı}\}$
olduğuna göre A kümesinin eleman sayısı kaçtır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $A = \{x: x^2 \leq 16, x \in \mathbb{N}\}$
 $B = \{x: x^2 \leq 16, x \in \mathbb{Z}\}$
olduğuna göre,
 $s(A) + s(B)$
toplamının sonucu kaçtır?
A) 18 B) 16 C) 14 D) 12 E) 10

3. A kümesi E evrensel kümesinin alt kümesidir.
 $E = \{x | x \text{ bir rakamdır.}\}$
 $A = \{0, 2, 5, 7\}$
olduğuna göre $E \cap A'$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4. Aşağıdakilerden hangisi boş kümedir?
A) $A = \{x: x \leq 2, x \text{ asal sayıdır.}\}$
B) $B = \{x: 3 < x < 8, x \text{ çift sayıdır.}\}$
C) $C = \{x: x \leq 0, x \text{ pozitif tam sayıdır.}\}$
D) $D = \{x: x < 1, x \text{ doğal sayıdır.}\}$
E) $E = \{x: x, \text{ haftanın S harfi ile başlayan bir gündür.}\}$

5. $A = \{x: x = k^2, -3 \leq k < 5, k \in \mathbb{Z}\}$
 $B = \{\text{pozitif rakamlar}\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre A ve B kümelerinin evrensel kümesi en az kaç elemanlıdır?
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

6. $A = \{n \cdot (-1)^{n+1} : n = 1, 2, 3, \dots, k\}$
kümesinin en büyük elemanı ile en küçük elemanı arasındaki fark 25'tir.
Buna göre A kümesinin negatif elemanlarının sayısı kaçtır?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

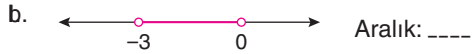


1106912

ÖĞRENCİ NO		YANITLAR	
1	() () () () ()	1	(A) (B) (C) (D) (E)
2	(1) (1) (1) (1) (1)	2	(A) (B) (C) (D) (E)
3	(2) (2) (2) (2) (2)	3	(A) (B) (C) (D) (E)
4	(3) (3) (3) (3) (3)	4	(A) (B) (C) (D) (E)
5	(4) (4) (4) (4) (4)	5	(A) (B) (C) (D) (E)
6	(5) (5) (5) (5) (5)	6	(A) (B) (C) (D) (E)
7	(6) (6) (6) (6) (6)	7	(A) (B) (C) (D) (E)
8	(7) (7) (7) (7) (7)	8	(A) (B) (C) (D) (E)
9	(8) (8) (8) (8) (8)	9	(A) (B) (C) (D) (E)
10	(9) (9) (9) (9) (9)	10	(A) (B) (C) (D) (E)
		11	(A) (B) (C) (D) (E)
		12	(A) (B) (C) (D) (E)
		13	(A) (B) (C) (D) (E)
		14	(A) (B) (C) (D) (E)
		15	(A) (B) (C) (D) (E)
		16	(A) (B) (C) (D) (E)
		17	(A) (B) (C) (D) (E)
		18	(A) (B) (C) (D) (E)
		19	(A) (B) (C) (D) (E)
		20	(A) (B) (C) (D) (E)

Örnek 18

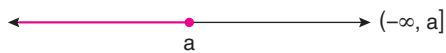
Aşağıda sayı doğrusunda gösterilen kümeleri aralık biçiminde yazınız.



DiFnot

Bir aralığın uç noktalarından biri veya ikisi sınırlandırılmadıysa o uç nokta ∞ (sonsuz) veya $-\infty$ (eksi sonsuz) sembollerinden uygun olanı ile gösterilir.

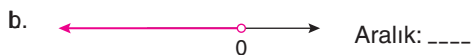
a bir gerçel sayı olmak üzere,



şeklinde gösterilir.

Örnek 19

Aşağıda sayı doğrusunda gösterilen kümeleri aralık biçiminde yazınız.



DiFnot

Gerçek sayı aralıkları birer kümedir. Dolayısıyla kümelerde tanımlı kesişim, birleşim, fark, tümleyen işlemleri aralıklarda da tanımlıdır.

Örneğin,

$A = (3, 5)$ ve $B = (4, 7]$ aralıkları aynı zamanda birer gerçel sayı kümesidir.

$$A \cap B = (4, 5)$$

$$A \cup B = (3, 7] \text{ olur.}$$

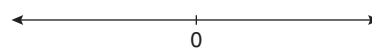
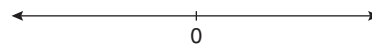
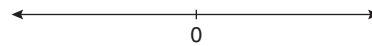
Örnek 20

$$A = \{x \mid -3 < x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$$

kümeleri veriliyor.

Aşağıdaki kümeleri aralık biçiminde yazıp sayı doğrusunda gösteriniz.



Örnek 21

 $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi,

$$A = \{x \mid x > 3, x \in \mathbb{R}\}$$

olarak veriliyor.

$\mathbb{R} - A$ kümesini aralık olarak yazıp sayı doğrusunda gösteriniz.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- Bir niceliğin bir başka nicelikten büyük veya küçük olma durumunu belirten ifadelere **eşitsizlik** denir.
- Eşitsizlikler “ $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ ” sembolleri kullanılarak ifade edilir.
- a ve b gerçel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \leq 0$$

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \geq 0$$

şeklindeki eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Örneğin,

$$6x - 4 \leq 0$$

$$-3x + 2 \leq 5$$

$$2m - \frac{m}{4} > 1$$

ifadeleri birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik belirtir.

Örnek 28

$x > -5$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı değerini bulunuz.

Örnek 29

$$-\frac{2}{3} \leq x < 4$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı olduğunu bulunuz.

Örnek 30

$$-3 \geq x$$

eşitsizliğinin gerçel sayılar kümesindeki çözüm kümesini sayı doğrusunda gösteriniz.

Örnek 31

Ela'nın kütlesinin kilogram cinsinden değeri bir yıl içinde 30 kilogramdan az 36 kilogramdan fazla olmamıştır.

Ela'nın kütlesinin bir yıl içinde alabileceği değerleri aralık olarak ifade ediniz.

DiFnot

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

a, b, c birer gerçel sayı olmak üzere,

$a < b$ ise

$$a + c < b + c$$

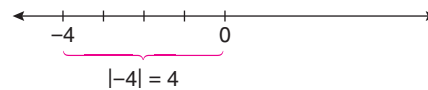
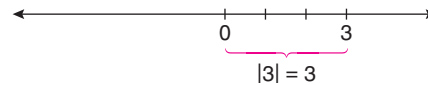
$$a - c < b - c \text{ olur.}$$

MUTLAK DEĞER

DiFnot

- Bir gerçel sayının sayı doğrusundaki yerinin sıfır noktasına olan uzaklığına bu sayının **mutlak değeri** denir.
- x gerçel sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir.
- Herhangi bir x gerçel sayısının mutlak değeri uzaklık belirttiği için pozitif değerlidir ya da sıfıra eşittir.

$$|x| \geq 0$$



Örnek 32

$$|7| - |-3| + |-2|$$

işleminin sonucunu bulunuz.

Örnek 43

$$(-\infty, 20] \cup [40, \infty)$$

eşitsizliğini mutlak değer biçiminde yazınız.

DiFnot

► İki sınırlı aralık durumu:

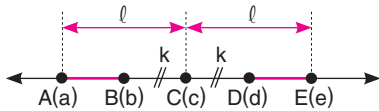
Uzunlukları eşit iki farklı aralıktan oluşan $[a, b] \cup [d, e]$ kapalı aralığını bir mutlak değerli eşitsizliğe aşağıdaki şekilde çevirebiliriz.

Bu eşitsizlik sayı doğrusu üzerinde,



şeklinde gösterilebilir.

Aralığın orta noktası $C(c)$,



şeklinde gösterilebilir.

Aralığın orta noktasının koordinatı (c),

$|BC| = |CD| = k$ olduğundan

$$c - b = d - c$$

$$c = \frac{b + d}{2}$$

bulunur. Ayrıca,

$|AC| = |CE| = \ell$ olduğundan

$$c - a = e - c$$

$$2c = a + e$$

$$c = \frac{a + e}{2}$$

bulunur. Buradan

$$c = \frac{b+d}{2} = \frac{a+e}{2}$$

bulunur.

DiFnot

Aralığın iç uç noktalarının orta noktaya olan uzaklığı (k),

$|BD| = 2k$ olduğundan

$$d - b = 2k$$

$$k = \frac{d-b}{2}$$

olarak bulunur.

Aralığın dış uç noktalarının orta noktaya olan uzaklığı (k),

$|AE| = 2\ell$ olduğundan

$$e - a = 2\ell$$

$$\ell = \frac{e-a}{2}$$

olarak bulunur.

Buradan

$$k \leq |x - c| \leq \ell$$

olarak bulunur.

Örnek 44

$$[10, 20] \cup [40, 50]$$

aralığını mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

1. $|x| = -x$
 $|y| > y$

olduğuna göre,

- I. $x + y < 0$
 II. $x \cdot y > 0$
 III. $y - x < 0$

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve II E) II ve III

2. $||x - 1| - 2| < 3$

eşitsizliğin çözüm kümesindeki tam sayıların toplamı kaçtır?

- A) 12 B) 9 C) 5 D) 4 E) 3

3. Televizyonda haber programının sunucusu: "Evet sevgili gençler, kayak sporunu sevenler, önümüzdeki hafta kar yağışı bekleniyor. Şu an Kartalkaya'da 4 derece olan hava sıcaklığının önümüzdeki hafta kar yağışı ile birlikte 5 ile 9 derece düşeceği tahmin ediliyor." demiştir.

Buna göre önümüzdeki hafta Kartalkaya'daki sıcaklık değerleri ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

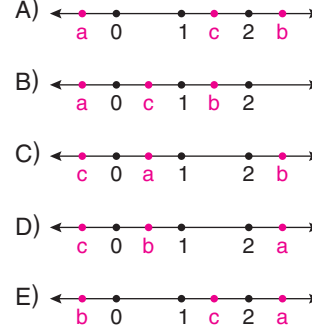
- A) $|x - 4| \leq 5$ B) $|x - 2| \leq 3$ C) $|x + 3| \leq 2$
 D) $|x - 3| \leq 2$ E) $|x + 2| \leq 3$

4. a, b ve c gerçel sayıları için,

$$a > a \cdot c > 2 \cdot a > a \cdot b$$

olduğu bilinmektedir.

Buna göre a, b ve c sayılarının sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdakilerden hangisi gibi olabilir?



5. Her elemanı bir pozitif tam sayı olan bir kümenin eleman sayısı, bu kümenin en küçük elemanının değerinden bir fazla ise bu kümeye "geniş küme" denir.

A, B ve C geniş kümeler olmak üzere,

- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap C = \{3\}$
- $1 \in A$
- $6 \in C$

olduğu biliniyor.

Buna göre B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{1, 2\}$ B) $\{3, 4, 8, 9\}$ C) $\{3, 5, 7, 8\}$
 D) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ E) $\{4, 5, 7, 8, 9\}$



1106913

ÖĞRENCİ NO		YANITLAR	
1	A B C D E	11	A B C D E
2	A B C D E	12	A B C D E
3	A B C D E	13	A B C D E
4	A B C D E	14	A B C D E
5	A B C D E	15	A B C D E
6	A B C D E	16	A B C D E
7	A B C D E	17	A B C D E
8	A B C D E	18	A B C D E
9	A B C D E	19	A B C D E
10	A B C D E	20	A B C D E