

SAYILAR - IV (SAYI KÜMELERİNİN ÖZELLİKLERİ • GERÇEK SAYILARIN İŞLEM ÖZELLİKLERİ)

SAYI KÜMELERİNİN ÖZELLİKLERİ

Sayıların Tarihsel Gelişimi

İlk Çağ insanı (ilkel insan, mağara insanı), rakam ve sayıları kullanmak ihtiyacını duymuştur. Bu devir insanları, avladıkları hayvanların veya sürüsündeki koyunların sayılarını belirtmek için yaşadıkları mağara duvarlarına çizgiler çizmişler, bir ağaç dalına çentikler atmışlardır. Bazen de bir ipe düğüm atmışlar veya çakıl taşlarını kullanmışlardır.

1	6
2	7
3	8
4	9
5	10

Çentik Atma

Bilinen en eski sayma sistemlerinden biri, eski Mısırlılara ait olanıdır. Eski Mısırlıların kullandıkları resim yazısının (hiyeroglif) başlangıç tarihi, MÖ 3300 yılına kadar geri gider. Eski Mısırlılara ait sayma sistemi, ilk çağ mağara insanının önceleri kullandığı sayma sisteminin gelişmiş şeklidir.

1		Bir
10	∩	On
100	⊙	Yüz
1000	⌘	Bin
10 000	∩ ∩	On bin
100 000	∩ ∩ ∩	Yüz bin
1 000 000	⌘	Bir milyon

Eski Mısırlıların Kullandıkları Semboller

Romalılar bazı sembol ve harfleri, rakam olarak kullanmışlardır. Bu rakamları, ilk olarak Romalılar kullandıkları için aritmetikte Roma rakamları ya da Romen rakamları olarak adlandırılır.

1 I	10 X	100 C
2 II	20 XX	200 CC
3 III	30 XXX	300 CCC
4 IV	40 XL	400 CD
5 V	50 L	500 D
6 VI	60 LX	600 DC
7 VII	70 LXX	700 DCC
8 VIII	80 LXXX	800 DCC
9 IX	90 XC	900 CM
10 X	100 C	1000 M

Roma Rakamları

Roma rakamlarında "sıfır" yoktur. Dolayısıyla sıfır olmadığı için Roma rakamları ile dört işlem yapmak imkânsızdır.

Sıfırın MÖ 250 yıllarında Orta Amerika'da yaşayan Maya kabilesinde kullanıldığına dair kanıtlar vardır. MS 800 civarında ise Hintliler sıfıra benzer bir sembol kullanmışlardır. Hindistan'dan yayılan sıfır MS 1400 yıllarında Avrupa'da da benimsenmiş ve kullanılmıştır. Sıfır sözcüğü büyük olasılıkla Arapça sıfır sözcüğünden türemiştir. Sıfır ise Hintçe de boş anlamına gelen 'sunya' sözcüğünün tercümesidir.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

Mayaların Kullandığı Semboller

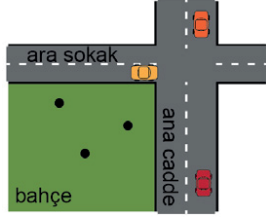
Bugün kullandığımız onluk sayı sistemi ve basamak değeri tarihinde ilk defa Hintliler tarafından geliştirilmiştir.

Araştırma Sorusu

- Günlük yaşamınızda en çok hangi sayı kümelerini kullanıyorsunuz? Tartışınız.
- Sayı kümeleri var olmasaydı ne gibi zorluklarla karşılaşırıldık? Tartışınız.
- Bilgisayar çalışırken hangi sayı sistemini kullanır? Araştırınız.

Örnek 23

Aşağıdaki şekilde, birbirleriyle dik kesişen ve her bir kenarı doğrusal olan bir ana cadde ile bir ara sokak arasında kalan bahçede bulunan elma, armut ve ceviz ağaçlarının konumlarını belirten üç nokta gösterilmiştir.



Bu bahçedeki ağaçlardan ana caddeye en yakın olanı elma, en uzak olanı ise armut ağacıdır.

Buna göre, ara sokağa en yakın olan ağaçtan en uzak olan ağaca doğru sıralama aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Armut - Ceviz - Elma B) Armut - Elma - Ceviz
C) Ceviz - Armut - Elma D) Elma - Armut - Ceviz
E) Elma - Ceviz - Armut

(2019-TYT)

Örnek 24

Bir asansör, içinde yer alan kişilerin ağırlıkları toplamı yük taşıma kapasitesini geçerse uyarı vermektedir. Boş olan bu asansöre; ağırlıkları 25, 40, 50, 60 ve 63 kilogram olan beş kişiden hangi dördü binerse binsin asansörün uyarı verdiği, hangi üçü binerse binsin asansörün uyarı vermediği görülmüştür.

Buna göre, bu asansörün yük taşıma kapasitesi kilogram türünden aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 170 B) 172 C) 174 D) 176 E) 178

(2019-TYT)

Örnek 25

Bilge, öğle yemeğinde birer porsiyon olarak verilen çorba, salata ve meyve seçeneklerinden iki tanesini alması gereken kalori miktarına göre seçecektir.

Bilge, yapabileceği seçimlerle ilgili olarak alması gereken kalori miktarını

- çorba ve meyve seçtiğinde aştığını,
- meyve ve salata seçtiğinde aşmadığını,
- salata ve çorba seçtiğinde tam olarak aldığını

hesaplamıştır.

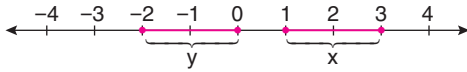
Birer porsiyon çorba, meyve ve salatanın kalorileri sırasıyla Ç, M ve S olduğuna göre, bu değerlerin doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\text{Ç} < \text{M} \leq \text{S}$ B) $\text{Ç} \leq \text{S} < \text{M}$ C) $\text{S} \leq \text{Ç} < \text{M}$
D) $\text{S} < \text{M} \leq \text{Ç}$ E) $\text{M} \leq \text{S} < \text{Ç}$

(2021-TYT)

1. $2x - 7 < x - 4$
olduğuna göre x 'in en büyük tam sayı değeri kaçtır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Aşağıdaki sayı doğrusunda x ve y sayılarının bulundukları aralıklar gösterilmiştir.



Buna göre $x - 2y$ sayısının bulunduğu aralık aşağıdakilerin hangisinde doğru gösterilmiştir?

- A) B) C) D) E)

3. x ve y birer tam sayı olmak üzere maliyeti x lira olan bir ürünün satış fiyatı y liradır.
 $y = 3x - 500$ olduğuna göre bu ürün en az kaç liraya satılırsa kâr edilir?
A) 251 B) 253 C) 500 D) 501 E) 503

4. a , b ve c pozitif gerçel sayılardır.

$$\frac{2}{bc} = \frac{3}{ab} = \frac{4}{ac}$$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $a < b < c$ B) $a < c < b$ C) $c < a < b$
D) $c < b < a$ E) $b < c < a$

5. Bir şirketin satış temsilcisinin aylık geliri,
 $A = 40\,000 + 0,2 \cdot x$ eşitliği ile belirlenmektedir. x , o ay içinde satışı yapılan toplam ürün sayısıdır.

Satış temsilcisinin Mayıs ayındaki geliri en az 56 000 lira olduğuna göre o ay içinde sattığı ürün sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 60 000 B) 65 000 C) 70 000
D) 75 000 E) 80 000

6. Can ile Özgür kardeşlerin her gün harcadıkları toplam para tutarı 50 liradır. Can her gün en az 15, en çok 25 lira para harcamaktadır.

Buna göre Özgür'ün her gün harcadığı paranın değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[25, 50]$ B) $[15, 35]$ C) $[25, 35]$
D) $[35, 50]$ E) $[15, 50]$



1106916

ÖĞRENCİ NO	YANITLAR
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	1 A B C D E 11 A B C D E
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	2 A B C D E 12 A B C D E
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	3 A B C D E 13 A B C D E
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	4 A B C D E 14 A B C D E
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	5 A B C D E 15 A B C D E
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	6 A B C D E 16 A B C D E
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	7 A B C D E 17 A B C D E
7 7 7 7 7 7 7 7 7 7	8 A B C D E 18 A B C D E
8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	9 A B C D E 19 A B C D E
9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	10 A B C D E 20 A B C D E

Sayı Kümelerinin Arada Olma Özelliği

Bir sayı kümesindeki herhangi iki sayı arasında aynı sayı kümesinden başka bir sayı varsa bu sayı kümesi arada olma özelliğine sahiptir.

Etkinlik 2

Sayı Kümeleri	Hangi Sayılar Arasında Arandığı	Aradaki Sayı Örneği
N	0 ile 1	
	0 ilâ 1	
	3 ile 6	
	−8 ile −4	
	$\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{2}$	
Z	3 ile 4	
	3 ilâ 4	
	7 ile 9	
	−8 ile −4	
	$-\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{2}$	
Q	0 ile 1	
	$\frac{2}{5}$ ile $\frac{4}{5}$	
	$\frac{3}{4}$ ile $\frac{7}{8}$	
	$\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{2}$	
R	3 ile 4	
	−6 ile −5	
	$\sqrt{5}$ ile $\sqrt{6}$	
	5,0053 ile 5,053	
	1,5 ile $\sqrt{3}$	

Sonuç:

- a. Doğal sayılar ($\mathbb{N}$) kümesinde arada olma özelliği
.....
- b. Tam sayılar ($\mathbb{Z}$) kümesinde arada olma özelliği
.....
- c. Rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) kümesinde arada olma özelliği
.....
- d. Gerçek sayılar ($\mathbb{R}$) kümesinde arada olma özelliği
.....

Örnek 26

- I. Herhangi iki gerçel sayı arasında istenen sayıda gerçel sayı bulunabilir.
- II. Ardışık iki tam sayı arasında herhangi bir tam sayı yer almaz.
- III. Doğal sayılar ve tam sayılar kümeleri sıralı kümelerdir.

Yukarıda verilen yargılardan hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

Aksine Örnek Vererek İspat (Karşıt Örnek Sunma)

Bu yöntemde bir örnek verilerek önermenin yanlış olduğu gösterilir.

Örneğin “İki asal sayının toplamı daima çifttir.” önermesinin yanlış olduğunu aksine örnek verme yöntemiyle ispat edelim.

$x = 2$ ve $y = 3$ için $x + y = 5$ olur.

Bu durumda önerme yanlıştır.

Örnek 27

$$x > -1 \text{ ise } x^2 > 1$$

önermesinin yanlış olduğunu aksine örnek verme yöntemiyle ispatlayınız.

Sayı Kümelerinin Dört İşleme Göre Kapalılığı

Bir kümedeki herhangi iki eleman bir işleme girdiğinde elde edilen sonuç yine aynı kümenin elemanı ise bu küme o işleme göre kapalıdır.

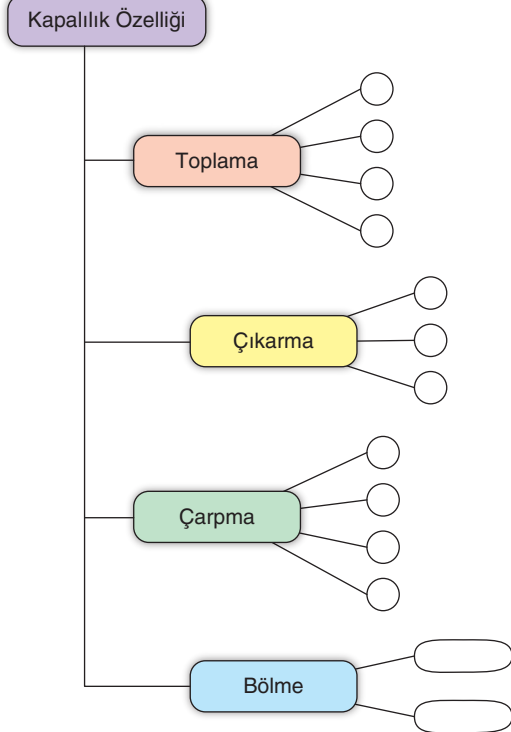
Etkinlik 3

Aşağıda verilen tablodaki boşlukları, her bir küme için örnekte verildiği gibi doldurunuz.

Küme	Elemanlar	Toplama	Çıkarma	Çarpma	Bölme
$\mathbb{N}$	2 ve 5	$2 + 5 = 7 \in \mathbb{N}$	$25 - -3 \notin \mathbb{N}$	$2 \cdot 5 = 10 \in \mathbb{N}$	$\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{Q} - \{0\}$					
$\mathbb{R}$					
$\mathbb{R} - \{0\}$					

Etkinlik 4

Aşağıdaki görselde $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} - \{0\}$ kümelerinin işlemlere göre kapalı özelliğini yerleştiriniz.



Örnek 28

İrrasyonel sayılar ($\mathbb{Q}'$) kümesinin çarpma işlemine göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

Örnek 29

- $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ve $y \in \mathbb{Q}'$ için $x \cdot y \in \mathbb{Q}'$
- $x \in \mathbb{Q}$ ve $y \in \mathbb{Q}'$ için $x \cdot y \in \mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{Q}$ ve $y \in \mathbb{Q}'$ için $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}'$

Yukarıdaki ifadelerden hangilerinin daima doğru olduğunu bulunuz.

Örnek 30

$$A = \{x : x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

kümesinin; toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine göre kapalı olup olmadığını bulunuz.

Önermeler

- Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm (yargı) belirten ifadeler **önerme** denir.

DİFnot

Özel ifadeler ile istek, ünlem, soru ve emir cümleleri önerme belirtmez.

Etkinlik 5

Aşağıdaki tabloda bazı matematiksel ifadeler verilmiştir. Tabloda boş bırakılan yerleri uygun olarak doldurunuz.

Matematiksel İfadeler	Doğru	Yanlış	Önerme Değil
-1 sayısının tek kuvvetleri kendisine eşittir.			
Rasyonel sayılar kümesi doğal sayılar kümesinin alt kümesidir.			
1'in çarpma işlemine göre tersi kaçtır?			
$a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$			
En küçük asal sayı kaçtır?			

Matematikte Sembolik Dil

İki veya daha fazla önermeyi birlikte ifade edebilmek için mantık bağlaçları kullanılır. Matematiksel sembollerin anlamları aşağıda verilmiştir.

	Niceleyici		Mantık Bağlaçları				
Sembol	$\exists$	$\forall$	$\wedge$	$\vee$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
Anlamı	bazı (en az bir)	her	ve	veya	ya da	ise	ancak ve ancak

Etkinlik 6

Tabloda boş bırakılan yerleri uygun olarak doldurunuz.

	Sembolik dil	Sözel dil	Doğru	Yanlış
a.		Her doğal sayı bir tam sayıdır.		
b.	$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ dir.			
c.		En az bir gerçel sayının 2 katının 5 fazlası 3'ten küçüktür.		
d.	$\exists x \in \mathbb{R}$ için $ x - 2 < 0$ dir.			
e.		Her n gerçel sayısı için $(-1)^{2n}$ sayısı 1'e eşittir.		

GERÇEL SAYILARIN İŞLEM ÖZELLİKLERİ

Gerçel Sayılar Kümesinde; Toplama, Çıkarma ve Çarpma İşlemlerinin Özellikleri

Değişme Özelliği

Örnek 31

Aşağıdaki toplama işleminde işlemlerin sonucunda sayıların yerlerinin değiştirilmesinin sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

	Toplama İşlemi	
a.	$2 + 3 =$	$3 + 2 =$
b.	$\frac{1}{2} + 4 =$	$4 + \frac{1}{2} =$
c.	$2\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) =$	$(-\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} =$
d.	$\sqrt{2} + \sqrt{32} =$	$\sqrt{32} + \sqrt{2} =$

DİFnot

Herhangi iki gerçel sayının toplamında sayıların yerlerinin değiştirilmesi sonucu değiştirmez.

Her $(\forall) x$ ve y gerçel sayısı için $(x, y \in \mathbb{R}), x + y = y + x$ 'tir.

Dolayısıyla, gerçel sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

Örnek 32

Aşağıdaki çıkarma işleminde işlemlerin sonucunda sayıların yerlerinin değiştirilmesinin sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

	Çıkarma İşlemi	
a.	$2 - 3 =$	$3 - 2 =$
b.	$\frac{1}{3} - 5 =$	$5 - \frac{1}{3} =$
c.	$2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$	$3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} =$
d.	$\sqrt{27} - \sqrt{243} =$	$\sqrt{243} - \sqrt{27} =$

DİFnot

Herhangi iki gerçel sayının çıkarılmasında sayıların yerlerinin değiştirilmesi sonucu değiştirebilir.

En az bir $(\exists) x$ ve y gerçel sayısı için

$(x, y \in \mathbb{R}), x - y \neq y - x$ 'tir.

Dolayısıyla, gerçel sayılar kümesinde çıkarma işleminin değişme özelliği yoktur.

Örnek 33

Aşağıdaki çarpma işleminde işlemlerin sonucunda sayıların yerlerinin değiştirilmesinin sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

	Çarpma İşlemi	
a.	$4 \cdot (-5) =$	$4 \cdot (-5) =$
b.	$4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$	$\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} =$
c.	$2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} =$	$3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} =$
d.	$2\sqrt{3} \cdot (-5\sqrt{3}) =$	$(-5\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3} =$

DİFnot

Herhangi iki gerçel sayının çarpılmasında sayıların yerlerinin değiştirilmesi sonucu değiştirmez.

Her $(\forall) x$ ve y gerçel sayısı için $(x, y \in \mathbb{R}), x \cdot y = y \cdot x$ 'tir.

Dolayısıyla, gerçel sayılar kümesinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

Birleşme Özelliği

Örnek 34

Aşağıdaki toplama işleminde işlem sırası için seçilen gruplamanın sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

	Toplama İşlemi	
a.	$2 + (3 + 6) =$	$(2 + 3) + 6 =$
b.	$(4,3 + 1,7) + 1 =$	$4,3 + (1,7 + 1) =$
c.	$(3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) + \sqrt{2} =$	$3\sqrt{2} + (5\sqrt{2} + \sqrt{2}) =$

DİFnot

Herhangi üç gerçel sayının toplamında işlem sırası için seçilen gruplamanın belirlenmiş şekli sonucu değiştirmez.

Her $(\forall) x, y$ ve z gerçel sayısı için

$(x, y, z \in \mathbb{R}), (x + y) + z = x + (y + z)$ dir.

Dolayısıyla, gerçel sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

Örnek 35

Aşağıdaki toplama işleminde işlem sırası için seçilen gruplamanın sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

Çıkarma İşlemi	
a. $(2 - 3) - 4 =$	$2 - (3 - 4) =$
b. $2\sqrt{3} - (3\sqrt{3} - \sqrt{3}) =$	$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) - \sqrt{3} =$

DİFnot

Herhangi üç gerçel sayının çıkarılmasında işlem sırası için seçilen gruplamanın belirlenmiş şekli sonucu değiştirir.

En az bir $(\exists)$ x, y ve z gerçel sayısı için

$(x, y, z \in \mathbb{R}), (x - y) - z \neq x - (y - z)$ dir.

Dolayısıyla, gerçel sayılar kümesinde çıkarma işleminin birleşme özelliği yoktur.

Örnek 36

Aşağıdaki çarpma işleminde işlem sırası için seçilen gruplamanın sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

Çarpma İşlemi	
a. $2 \cdot (3 \cdot 6) =$	$(2 \cdot 3) \cdot 6 =$
b. $(1,2 \cdot 0,5) \cdot 3 =$	$1,2 \cdot (0,5 \cdot 3) =$
c. $(3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6} =$	$3\sqrt{2} \cdot (5\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}) =$

DİFnot

Herhangi üç gerçel sayının çarpılmasında işlem sırası için seçilen gruplamanın belirlenmiş şekli sonucu değiştirmez.

Her $(\forall)$ x, y ve z gerçel sayısı için

$(x, y, z \in \mathbb{R}), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ dir.

Dolayısıyla, gerçel sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

Birim (Etkisiz) Eleman

Örnek 37

Aşağıdaki toplama işlemlerinde sonucu değiştirmeyen sayıların neler olduğunu gözlemleyiniz.

Toplama İşlemi	
a. $2 + 0 =$	$0 + 2 =$
b. $\sqrt{3} + 0 =$	$0 + \sqrt{3} =$

DİFnot

Herhangi bir gerçel sayıya 0 eklemek sonucu değiştirmez.

Her $(\forall)$ x gerçel sayısı için $(x \in \mathbb{R}), x + 0 = 0 + x = x$ 'tir.

Buna göre toplama işleminin birim elemanı 0'dır.

Örnek 38

Aşağıdaki çıkarma işlemlerinde sonucun değişip değişmediğini gözlemleyiniz.

Çıkarma İşlemi	
a. $2 - 0 =$	$0 - 2 =$
b. $\sqrt{3} - 0 =$	$0 - \sqrt{3} =$

DİFnot

En az bir $(\exists)$ x gerçel sayısı için $(x \in \mathbb{R}), x - 0 \neq 0 - x$ 'tir.

Buna göre çıkarma işleminin birim elemanı yoktur.

Örnek 39

Aşağıdaki çarpma işlemlerinde sonucu değiştirmeyen sayıların neler olduğunu gözlemleyiniz.

	Çarpma İşlemi	
a.	$2 \cdot 1 =$	$1 \cdot 2 =$
b.	$(-\sqrt{3}) \cdot 1 =$	$1 \cdot (-\sqrt{3}) =$

DİFnot

Herhangi bir gerçel sayıyı 1 ile çarpmak sonucu değiştirmez. Her $(\forall) x$ gerçel sayısı için $(x \in \mathbb{R})$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ 'tir. Buna göre çarpma işleminin birim elemanı 1'dir.

Ters Eleman

Örnek 40

Aşağıdaki toplama işlemlerinin sonucunda elde edilen sayının ne olduğunu gözlemleyiniz.

	Toplama İşlemi	
a.	$2 + (-2) =$	$(-2) + 2 =$
b.	$\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) =$	$(-\sqrt{7}) + \sqrt{7} =$

DİFnot

Her $(\forall) x$ gerçel sayısı için $(x \in \mathbb{R})$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olduğunda x 'in toplama işlemine göre tersi $-x$ 'tir.

Herhangi iki gerçel sayının toplamı 0 (toplama işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayı toplama işlemine göre birbirinin tersidir.

Gerçel sayılar kümesi üzerinde çıkarma işleminin birim elemanı olmadığından ters elemanı da yoktur.

Örnek 41

Aşağıdaki çarpma işleminde işlemlerin sonucunda elde edilen sayının ne olduğunu gözlemleyiniz.

	Çarpma İşlemi	
a.	$4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) =$	$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 4 =$
b.	$\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) =$	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} =$
c.	$\pi \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right) =$	$\left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \pi =$

DİFnot

Herhangi iki gerçel sayının çarpımı 1 (çarpma işleminin etkisiz elemanı) ise bu iki sayı çarpma işlemine göre birbirinin tersidir.

Her $(\forall) x$ gerçel sayısı için $(x \in \mathbb{R} - \{0\})$,

$x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x = 1$ olduğundan, x 'in çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{x}$ ya da x^{-1} dir.

DİFnot

Gerçel sayılar kümesinde 0'ın çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Yutan Eleman

Örnek 42

Aşağıdaki çarpma işleminde işlem sırası için seçilen gruplamanın sonucu değiştirip değiştirmediğini inceleyiniz.

	Çarpma İşlemi	
a.	$4 \cdot 0 =$	$0 \cdot 4 =$
b.	$(-\sqrt{5}) \cdot 0 =$	$0 \cdot (-\sqrt{5}) =$
c.	$\pi \cdot 0 =$	$0 \cdot \pi =$

DiFnot

Herhangi bir gerçel sayı 0 ile çarpıldığında sonuç her zaman 0'dır.

Bu yüzden, 0'a çarpma işleminin **yutan elemanı** denir.

Her ($\forall$) x , y ve z gerçel sayısı için

$(x \in \mathbb{R}), (x \cdot 0) = 0 = 0 \cdot x$ olduğundan çarpma işlemine göre yutan elemanı 0'dır.

DiFnot

Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çıkarma işleminin yutan elemanı yoktur.

Örnek 43

Aşağıdaki işlemlerin sonucunda elde edilen sayının ne olduğunu gözlemleyiniz.

Çarpma İşleminin Toplama veya Çıkarma İşlemleri Üzerine Soldan Dağılıma Özelliği		
a.	$4 \cdot (2 + 6) =$	$4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 =$
b.	$3 \cdot (0,4 - 0,7) =$	$3 \cdot 0,4 - 3 \cdot 0,7 =$
c.	$\left(5 + \frac{2}{3}\right) \cdot 6 =$	$5 \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 6 =$
d.	$(\sqrt{243} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} =$	$\sqrt{243} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} =$

DiFnot

Çarpma işleminin toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağılıma özelliği vardır.

Her $(\forall)$ x, y ve z gerçel sayısı için $(x, y, z \in \mathbb{R})$,

$$z \cdot (x \pm y) = z \cdot x \pm z \cdot y$$

$$(x \pm y) \cdot z = x \cdot z \pm y \cdot z$$

dir.

Örnek 44

Herhangi a, b ve c gerçel sayıları için aşağıdaki verilen eşitlikleri “Doğru (D)-Yanlış (Y)” olarak belirleyiniz.

a. $a + (b + c) = (a + b) + c$ dir.

b. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

c. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ dir.

d. $a - (b - c) = (a - b) - c$ 'dir.

e. $a : (b : c) = (a : b) : c'$ dir.

Örnek 45

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz ve her bir basamakta gerçek sayılarda işlemlerin hangi özelliklerinin kullanıldığını belirleyiniz.

$$\begin{aligned} 3(4x + 3y) + 2(3x - y) &= 12x + 9y + 6x - 2y & 1 \\ &= 12x + 6x + 9y - 2y & 2 \\ &= (12 + 6)x + (9 - 2)y & 3 \\ &= 18x + 7y \end{aligned}$$

Örnek 46

Aşağıda verilen boşlukları gerçel sayılarda toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini kullanarak doldurunuz.

	İşlem	İşlem Özelliği
a.	$\sqrt{6} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{6}$	
b.	$(3 + \sqrt{5}) + \sqrt{2} = 3 + (\sqrt{5} + \sqrt{2})$	
c.	$0 + \sqrt{6} = \sqrt{6} + 0 = \sqrt{6}$	
d.	$\sqrt{11} + \left(\frac{3}{4} + 2\right) = \left(\sqrt{11} + \frac{3}{4}\right) + 2$	
e.	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$	
f.	$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}) \cdot \sqrt{11} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} \cdot \sqrt{11})$	
g.	$\sqrt{2} \cdot 1 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$	
h.	$\sqrt{12} \cdot 0 = 0 \cdot \sqrt{12} = 0$	
i.	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$	
j.	$(-\sqrt{7}) \cdot 0 = 0 \cdot (-\sqrt{7}) = 0$	
k.	$\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} = 1$	
l.	$\sqrt{2} \cdot (3 + \sqrt{7}) = \sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$	
m.	$\sqrt{21} \cdot \left(\frac{3}{4} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{21} \cdot \frac{3}{4} - \sqrt{21} \cdot \sqrt{2}$	
n.	$4 \cdot \left(\frac{3}{4} + \sqrt{7}\right) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \sqrt{7}$	

Çarpanlara Ayırma

- Toplam veya fark şeklinde verilen ifadelerin benzer olanları çarpım şeklinde yazma işlemine **çarpanlara ayırma** denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

Ortak Çarpan Parantezine Alma

- $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ birer ifade olmak üzere,

$$P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$
ifadesinin iki teriminde de $P(x)$ ortak olduğundan bu ifade $P(x)$ ortak parantezine alınabilir.
- Bu durumda verilen ifade,

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$$
şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.
- Bu şekilde çarpanlara ayırmaya **ortak çarpan parantezine alma yoluyla çarpanlara ayırma yöntemi** denir.
- Çarpanlara ayrılacak olan ifadenin her terimini bölen sayı, harf ya da ifade varsa bu ifade ortak çarpan olacak şekilde paranteze alınır.
- Ortak çarpan parantezine alırken katsayıları bölen en büyük sayı ortaktır veya harfli ifadelerin üssü en küçük olanı ortaktır.
- $(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$
- $(x - y)^{2n-1} = -(y - x)^{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$

Örnek 47

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırınız.

- $2x + 4 =$
- $x^2 + 7x =$
- $a \cdot b + b =$
- $x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2 =$
- $a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$
- $x \cdot (y - 2) + z \cdot (2 - y) =$
- $(x - y)^3 - a \cdot (y - x)^2 =$
- $x \cdot (a - 2b) - y \cdot (2b - a) =$