

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Günlük hayatta karşımıza çıkan birçok durumda birbiriyle ilişkili iki çokluktan birinin diğerine bağlı olarak değiştiğini gözlemleyebiliriz. Örneğin marketten aldığımız domates için ödeyeceğimiz tutarın aldığımız domates miktarına bağlı değiştiğini biliyoruz.

Bir bitkinin boyundaki değişimin zamana bağlı değiştiğini söyleyebiliriz.

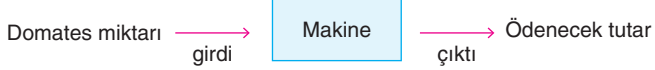
Hareket hâlindeki bir aracın aldığı yolun zamana bağlı değiştiğini gözlemleyebiliriz. Bu ve buna benzer durumları fonksiyon kavramı kullanılarak matematiksel olarak ifade edebiliriz. Örneğin marketten domates alan Defne Hanım'ın aldığı domates miktarına ödeyeceği tutarı inceleyelim.

Domatesin bir kilogramının fiyatının 15 lira olduğunu varsayalım. Buna göre aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

Miktar (kg)	Tutar (Lira)
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75

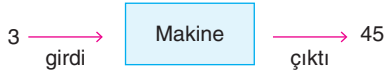
Defne Hanım aldığı domatesi hassas tartıya koyduğunda ekranda kütle kısmında aldığı domates miktarı tutar kısmında ise ödemesi gereken tutarı gösterecektir.

Bu durumu aşağıdaki şema ile gösterelim.



Burada domates miktarı girdi, ödenecek tutarı çıktı olarak isimlendirilebilir.

Buna göre Defne Hanım örneğinde şema,



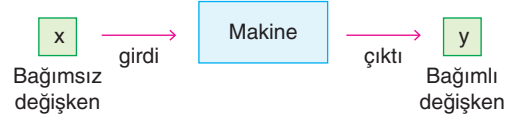
şeklinde olacaktır.

Dikkat edilirse Defne Hanım'ın örneğinde girdi ve çıktı arasındaki ilişki; çıktının girdinin 15 katı şeklinde olmasıdır. Makine incelendiğinde alınan domates miktarı değiştikçe ödenecek tutar da değiştiğinden bu iki durum değişken olarak ifade edilir.

Tutarın değişmesi alınan miktara bağlıdır. Bu durumda tutara **bağımlı değişken**, alınan miktara **bağımsız değişken** denir.

Alınan miktarı x ile ödenecek tutarı y ile isimlendirirsek y değişkeni x 'e bağımlı değişken olur.

Yukarıdaki şemayı bağımlı ve bağımsız değişkenlere göre aşağıdaki gibi genelleyebiliriz.



Defne Hanım'ın örneğinde bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi

$$y = 15x$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Örnek 1

Bir araç saatte 100 kilometre hızla hareket etmektedir.

Bu aracın zamana göre aldığı yolu aşağıdaki tabloda gösteriniz.

Zaman (Saat)	Yol (Kilometre)
1	
2	
3	
4	
x	

- Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkilendirmede bağımsız değişkenlerin (x) oluşturduğu küme **tanım kümesi**, bağımlı değişkenlerin (y) oluşturduğu küme **görüntü kümesi** olarak isimlendirilir.
- Tanım kümesindeki her bir x elemanının eşleştiği y değerine **x 'in f altındaki görüntüsü** denir. Bu durum $y = f(x)$ biçiminde ifade edilir.

Örneğin, Ahmet Bey 60 000 liralık borcunu bir yıl boyunca eşit taksitlerle ödeyecektir.

Ahmet Bey'in zamana göre (ay) kalan borcunu tabloda gösterip bu ilişkilendirmeyi fonksiyon olarak ifade edelim.

Zaman (ay)	Kalan Borç (Lira)
1	55 000
2	50 000
3	45 000
⋮	⋮
x	60 000 - 5000x

Burada x ile y arasındaki ilişkilendirmeyi

$$y = 60\,000 - 5000x \text{ veya}$$

$$f(x) = 60\,000 - 5000x$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$f(x) = x$ Biçimindeki Doğrusal Fonksiyonlar

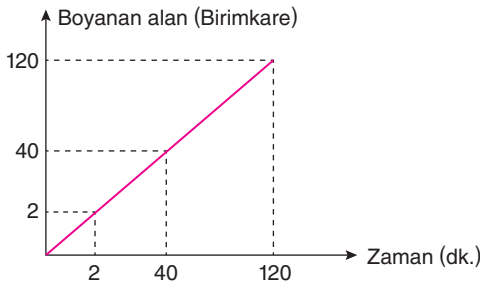
Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x$ biçimindeki f fonksiyonu doğrusal fonksiyondur. Doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken veya nitel özellikleri belirlenirken f fonksiyonundan yararlanılır.

Uygun Aralıkta $f(x) = x$ Şeklinde Tanımlı Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Sabit hızla duvar boyayan bir boyacı dakikada 1 desimetrekare duvar boyamaktadır. Boyacı 100 dakika boyunca duvar boyamış ve bir duvarın 100 desimetrekarelik kısmını boyamıştır. Boyacının boyama işlemine başladığı andan itibaren zamana (dakika) bağlı boyadığı alanı (desimetrekare) gösteren fonksiyon f olmak üzere, f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = x$ olur.

Örnek 2

Aşağıda verilen f fonksiyonunun grafiğini inceleyelim.



Aşağıdaki tabloda bağımsız değişkenlerin (x) aldığı bazı değerlere karşılık gelen bağımlı değişken f(x) değerleri verilmiştir.

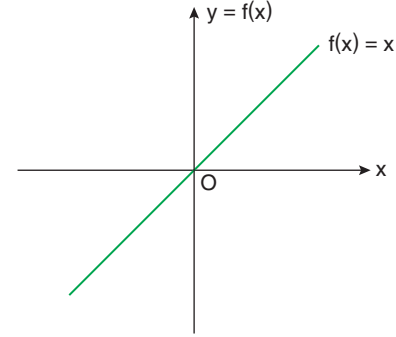
Tabloda verilmeyen değerleri bulunuz.

x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	...	...
f(x)	0	...	...	32	68

Temel Kavramlar

Tanım Kümesi: Bir fonksiyonda bağımsız değişkenlerin alabileceği tüm değerler tanım kümesi olarak adlandırılır.

$f(x) = x$ biçimindeki fonksiyonun grafiğini inceleyelim.



f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde bağımsız değişkenlerin tüm gerçek sayı değerlerini alabildiği görülür. Buna göre $f(x) = x$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ 'dir.

Görüntü Kümesi: Bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlere karşılık bağımlı değişkenin alabildiği tüm değerler görüntü kümesi olarak adlandırılır.

$f(x) = x$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde bağımlı değişkenin tüm gerçek sayı değerlerini alabildiği görülür. Buna göre $f(x) = x$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}$ 'dir. Buna göre f fonksiyonu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanabilir.

Fonksiyonun Sıfırı: $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerine f fonksiyonunun sıfırı denir. Boyacı örneğinde f fonksiyonunun sıfırı 0'dır.

- ▶ Fonksiyonun tanımlı olduğu belirli bir aralık için bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler de artıyorsa fonksiyon bu aralıkta artandır.
 - ▶ Fonksiyonun tanımlı olduğu belirli bir aralık için bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler de azalıyorsa fonksiyon bu aralıkta azalandır.
- Boyacı örneğinde $f(x) = x$ fonksiyonu tanımlı olduğu her aralıkta daima artandır.
- ▶ Bir fonksiyon bağımlı değişkenin bazı değerlerine göre negatif olabilir. Bağımlı değişken pozitifken fonksiyon pozitif değerli, bağımlı değişken negatifken fonksiyon negatif değerlidir.

Bir fonksiyonun pozitif veya negatif olduğu aralık fonksiyonun sıfırına göre bulunur.

x	$-\infty$	0	∞
f(x) = x	-	0	+

Yukarıda görüldüğü gibi $f(x) = x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında pozitif değerli, $(-\infty, 0)$ aralığında negatif değerlidir.

- a ve b birer gerçel sayı ve f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq f(m)$ şartını sağlayan $f(m)$ değerine f fonksiyonunun **maksimum değeri** denir.

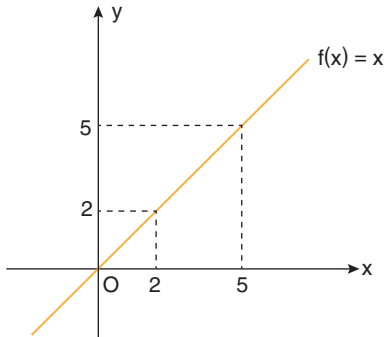
$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq f(n)$ şartını sağlayan $f(n)$ değerine f fonksiyonunun **minimum değeri** denir.

Örneğin $f(x) = x$ fonksiyonunu $[2, 10]$ aralığında incelersek maksimum değerinin 10, minimum değerinin 2 olduğunu görürüz.

$f(x) = x$ fonksiyonunu $[-2, 3]$ aralığında incelersek maksimum değerinin 3, minimum değerinin -2 olduğunu görürüz.

- Bir f fonksiyonunun tanım kümesindeki x değerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri de farklı ise f bire bir fonksiyondur.

Diğer bir ifadeyle görüntü kümesindeki bir $f(x)$ değerine tanım kümesindeki yalnızca bir x değeri karşılık geliyorsa f bire bir fonksiyondur.



$f(x) = x$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde tanım kümesinin herhangi iki elemanının daima farklı görüntüleri olduğu görülür. Bu durumda $f(x) = x$ fonksiyonu bire birdir.

- $f(x) = x$ biçimindeki f fonksiyonunun nitel özellikleri incelendiğinde f fonksiyonunun tanımlı ve görüntü kümesi gerçel sayılardır.
- f fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ aralığında işareti negatif, $(0, \infty)$ aralığında işareti pozitifdir.
- f fonksiyonunda $f(0) = 0$ olduğundan $x = 0$ f fonksiyonunun sıfırıdır.
- f fonksiyonunun maksimum ve minimum noktası yoktur.
- f fonksiyonu gerçel sayılarda artandır.
- f fonksiyonu bire birdir.

$g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ Biçimindeki Doğrusal Fonksiyonlar

$f(x) = x$ olmak üzere,

$$g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$$

şeklinde ifade edilebilen fonksiyonlara **doğrusal fonksiyonlar** denir. Doğrusal fonksiyonların grafikleri $f(x) = x$ doğrusal fonksiyonuna dönüşümler uygulayarak elde edilir.

$g(x) = ax$ Biçimindeki Doğrusal Fonksiyonlar

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{2}$$

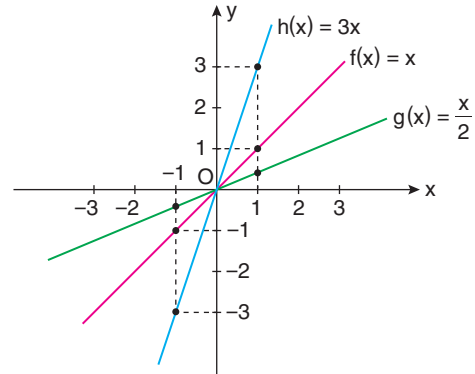
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3x$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu, verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösterelim.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f(x) = x$			
$g(x) = \frac{x}{2}$			
$h(x) = 3x$			

Tablo incelendiğinde her $x \in \mathbb{R}$ için g fonksiyonunun aldığı değerlerin, f fonksiyonunun aldığı değerlerin a katı olduğu görülmektedir.



Grafik incelendiğinde $a > 1$ iken g fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine daha yakın olduğu, $0 < a < 1$ iken h fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine daha uzak olduğu görülmektedir.

DİFnot

Doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken $f(0)$ değerinin grafiğin y eksenini kestiği noktanın ordinatı, $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerinin grafiğin x eksenini kestiği noktanın apsisi olduğu bilinmelidir.

Örnek 3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

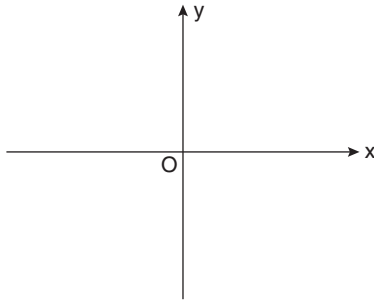
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x}{3}$$

fonksiyonları veriliyor.

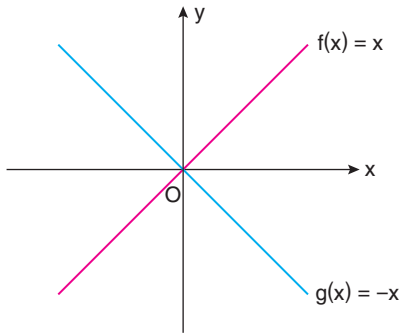
Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösteriniz.

Fonksiyon	x = -1	x = 0	x = 1
$f(x) = x$			
$g(x) = 2x$			
$h(x) = \frac{x}{3}$			



DİFnot

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x$ fonksiyonunun grafiği $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriğidir.



Şimdi de $g(x) = ax$ fonksiyonunun grafiğini $a < 0$ için inceleyelim.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x$$

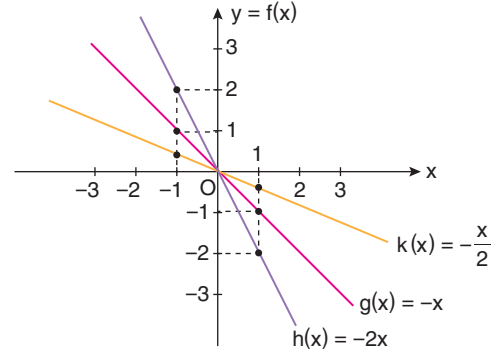
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2x$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = -\frac{x}{2}$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu, verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösterelim.

Fonksiyon	x = -1	x = 0	x = 1
$g(x) = -x$			
$h(x) = -2x$			
$k(x) = -\frac{x}{2}$			



Grafik incelendiğinde $a < -1$ için h fonksiyonunun grafiğinin g fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine daha yakın olduğu, $-1 < a < 0$ için k fonksiyonunun grafiğinin g fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine daha uzak olduğu görülmektedir.

Örnek 4

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x$$

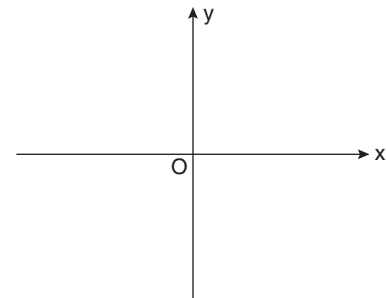
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -\frac{3x}{2}$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = -\frac{x}{3}$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösteriniz.

Fonksiyon	x = -1	x = 0	x = 1
$g(x) = -x$			
$h(x) = -\frac{3x}{2}$			
$k(x) = -\frac{x}{3}$			



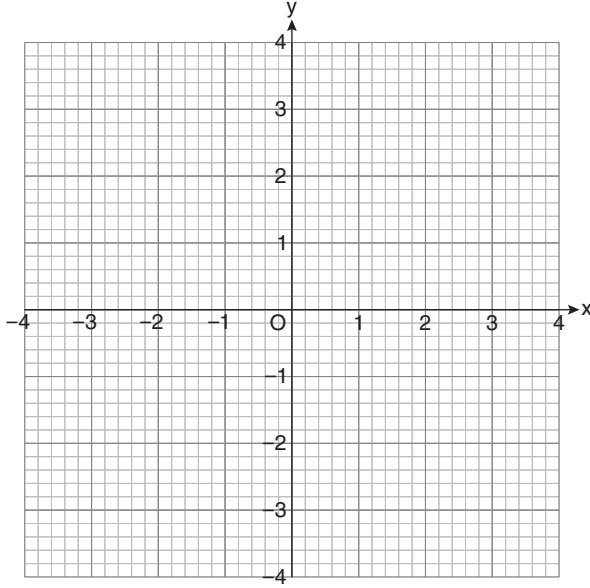
Gerçek Sayılarda $f(x) = ax$ Biçiminde Tanımlı Fonksiyonun Nitel Özellikleri

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -3x$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizip $f(x) = ax$ biçiminde tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyelim.



Fonksiyon Nitel Özellik	$f(x) = x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = -3x$
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
İşareti			
Sıfırı			
Artan-Azalanlık			
Maksimum Değer			
Minimum Değer			
Bire Birliği			

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax$ fonksiyonu

► $a > 0$ ise

- Tanım kümesi gerçel sayılardır.
- Görüntü kümesi gerçel sayılardır.
- İşareti $(-\infty, 0)$ aralığında negatif, $(0, \infty)$ aralığında pozitif.
- Sıfırı 0'dır.
- Artandır.

- Maksimum ve minimum değeri yoktur.

- Bire birdir.

► $a < 0$ ise

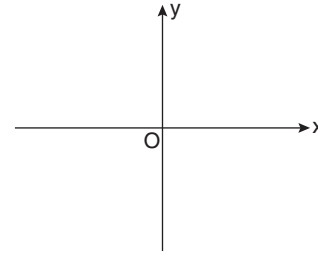
- Tanım kümesi gerçel sayılardır.
- Görüntü kümesi gerçel sayılardır.
- İşareti $(-\infty, 0)$ aralığında pozitif, $(0, \infty)$ aralığında negatiftir.
- Sıfırı 0'dır.
- Azalandır.
- Maksimum ve minimum değeri yoktur.
- Bire birdir.

Örnek 5

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -\frac{x}{3}$$

a. Fonksiyonların grafiklerini çiziniz.



b. Fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyiniz.

Fonksiyon Nitel Özellik	$f(x) = \frac{x}{2}$	$g(x) = -\frac{x}{3}$
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Sıfırı		
Artan-Azalanlık		
Maksimum Değer		
Minimum Değer		
Bire Birliği		

c. Çizdiğiniz grafiklerin eğimini bulup artan azalan olma durumlarına göre değerlendiriniz.

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ fonksiyonunun grafiğinin eğimi: } \dots\dots\dots$$

$$g(x) = -\frac{x}{3} \text{ fonksiyonunun grafiğinin eğimi: } \dots\dots\dots$$

DİFnot

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax$ fonksiyonunun grafiğinin eğimi a 'dır.

Gerçek Sayılarda Tanımlı $g(x) = x + b$ Biçimindeki Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 1$

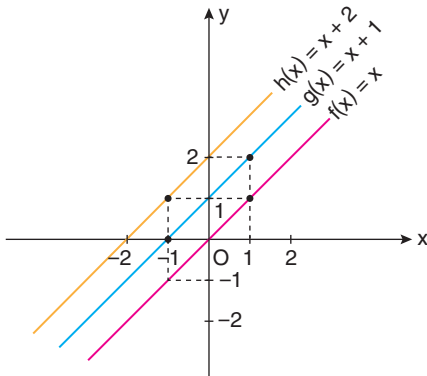
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x + 2$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösterelim.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f(x) = x$			
$g(x) = x + 1$			
$h(x) = x + 2$			

Tablo incelendiğinde her $x \in \mathbb{R}$ için g fonksiyonunun aldığı değerlerin f fonksiyonunun aldığı değerden 1, h fonksiyonunun aldığı değerlerin f fonksiyonunun aldığı değerlerden 2 fazla olduğu görülür.



Grafikler incelendiğinde g fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğinin 1 birim sola ötelenmesiyle, h fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğinin 2 birim sola ötelenmesiyle elde edildiği görülür.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 1$

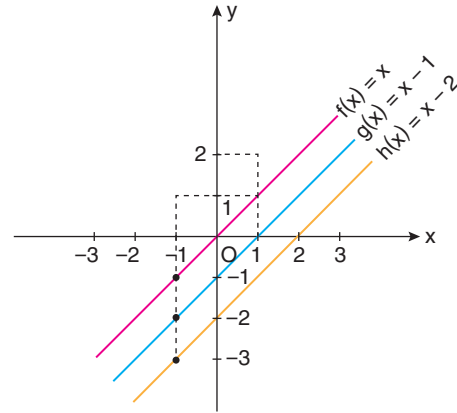
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x - 2$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösterelim.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f(x) = x$	-1	0	1
$g(x) = x - 1$	-2	-1	0
$h(x) = x - 2$	-3	-2	-1

Tablo incelendiğinde her $x \in \mathbb{R}$ için g fonksiyonunun aldığı değerlerin f fonksiyonunun aldığı değerlerden 1, h fonksiyonunun aldığı değerlerin f fonksiyonunun aldığı değerlerden 2 az olduğu görülür.



Grafikler incelendiğinde g fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğinin 1 birim sağa ötelenmesiyle, h fonksiyonunun grafiğinin f fonksiyonunun grafiğinin 2 birim sağa ötelenmesiyle elde edildiği görülür.

DİFnot

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ olmak üzere,

$g(x) = x + b$

fonksiyonunun grafiği $b < 0$ ise f fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre b birim sağa, $b > 0$ ise f fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre b birim sola ötelenmesiyle elde edilir.

Örnek 6

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

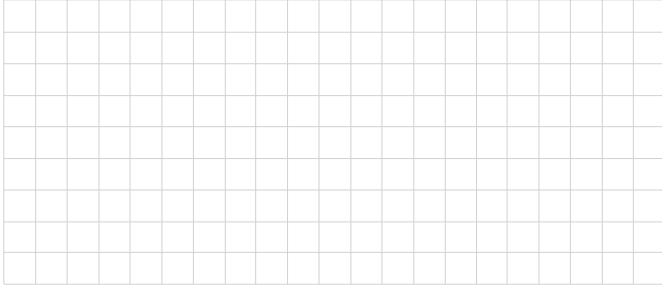
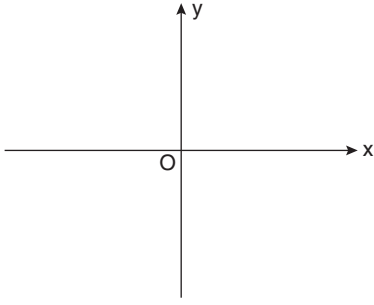
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x - 4$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösteriniz.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f(x) = x$			
$g(x) = x + 3$			
$h(x) = x - 4$			



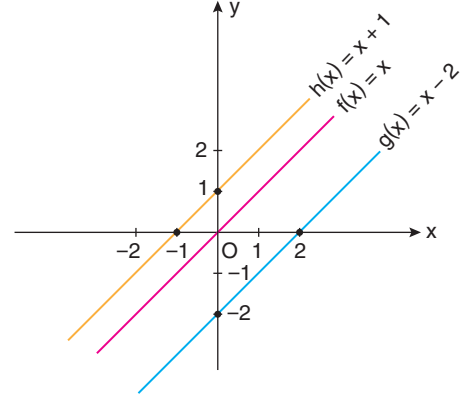
Gerçel Sayılarda $f(x) = x + b$ Biçiminde Tanımlı Fonksiyonun Nitel Özellikleri

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 2$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x + 1$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizip $f(x) = x + b$ biçiminde tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyelim.



Fonksiyon	$f(x) = x$	$g(x) = x - 2$	$h(x) = x + 1$
Nitel Özellik			
Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
İşareti			
Sıfırı			
Artan-Azalanlık			
Maksimum Değer			
Minimum Değer			
Bire Birliği			

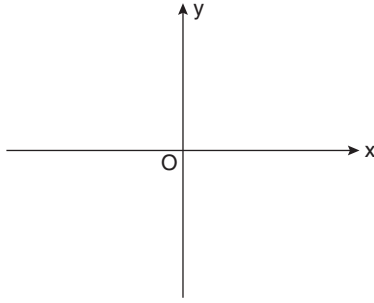
- $f(x) = x + b$ fonksiyonunun,
- Tanım kümesi gerçel sayılardır.
 - Görüntü kümesi gerçel sayılardır.
 - İşareti $(-\infty, -b)$ aralığında negatif, $(-b, \infty)$ aralığında pozitifdir.
 - Sıfırı $-b$ 'dir.
 - Artandır.
 - Maksimum ve minimum değeri yoktur.

Örnek 7

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \frac{3}{2}$$

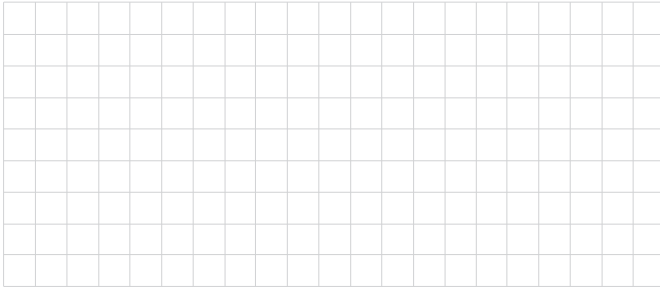
a. Fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.



b. Bu fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyiniz.

Fonksiyon	$f(x) = x + \frac{1}{2}$	$g(x) = x - \frac{3}{2}$
Nitel Özellik		
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Sıfırı		
Artan-Azalanlık		
Maksimum Değer		
Minimum Değer		
Bire Birliği		

c. Çizdiğiniz grafiklerin eğimini karşılaştırınız.



DİFnot

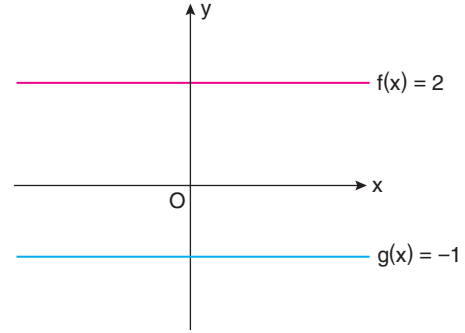
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ doğrusunun eğimi ile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + b$ doğrusunun eğimi eşittir.

Yani bir doğrunun eğimi öteleme sonucunda değişmez.

Sabit Fonksiyon

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a = 0$ için $f(x) = b$ biçimindeki f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir. Sabit fonksiyon da bir doğrusal fonksiyondur.

Örneğin $f(x) = 2, g(x) = -1$ biçimindeki fonksiyonlar doğrusal fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların grafiklerini inceleyelim.



Gerçel Sayılarda Tanımlı $g(x) = ax + b$ Biçimindeki Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

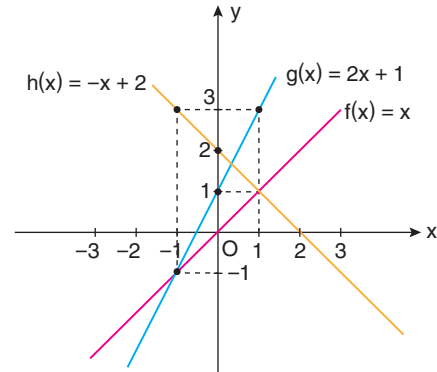
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x + 2$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösterelim.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f(x) = x$			
$g(x) = 2x + 1$			
$h(x) = -x + 2$			



Örnek 8

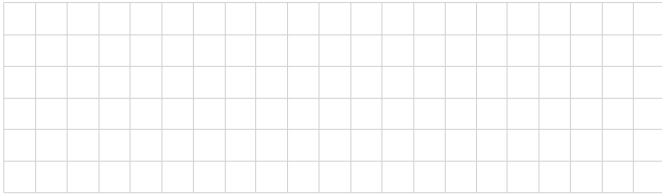
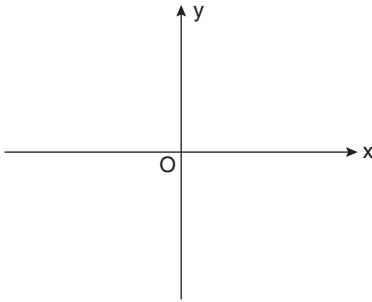
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + 6$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2x + 4$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösteriniz.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$g(x) = 3x + 6$			
$h(x) = -2x + 4$			

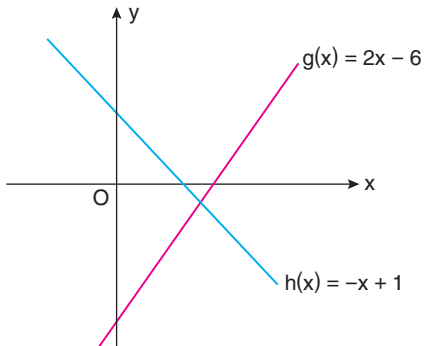


Gerçek Sayılarda Tanımlı $f(x) = ax + b$ Biçimindeki Fonksiyonun Nitel Özellikleri

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - 6$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x + 1$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizip gerçel sayılarda $f(x) = ax + b$ biçiminde tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini bulalım.



Fonksiyon	$g(x) = 2x - 6$	$h(x) = -x + 1$
Nitel Özellik		
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Sıfırı		
Artan-Azalanlık		
Maksimum Değer		
Minimum Değer		
Bire Birliği		

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ fonksiyonunun,
- Tanım kümesi gerçel sayılardır.
 - Görüntü kümesi gerçel sayılardır.
 - İşareti: $a > 0$ ise $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ aralığında negatif, $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ aralığında pozitif
 $a < 0$ ise $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ aralığında pozitif, $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ aralığında negatif
 - Sıfırı $-\frac{b}{a}$ 'dir.
 - $a > 0$ ise artandır.
 - $a < 0$ ise azalandır.
 - Maksimum ve minimum değeri yoktur.
 - Bire birdir.

DİFnot

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiğinin eğimi a 'dır.

Doğrusal fonksiyonda $a > 0$ ise grafiğin eğimi pozitif,

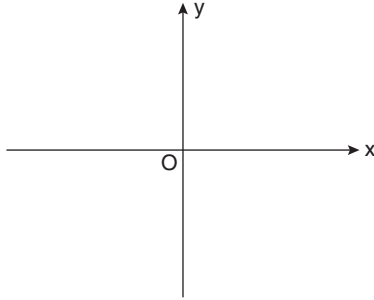
$a < 0$ ise grafiğin eğimi negatiftir.

Örnek 9

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x - 4$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4x + 1$$

a. Fonksiyonların grafiklerini çiziniz.



b. Bu fonksiyonların nitel özelliklerini belirleyiniz.

Fonksiyon Nitel Özellik	$f(x) = -2x - 4$	$g(x) = 4x + 1$
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Sıfırı		
Artan-Azalanlık		
Maksimum Değer		
Minimum Değer		
Bire Birliği		

Gerçel Sayılarda Tanımlı $g(x) = a \cdot (x \pm r) + k$ Biçimindeki Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x$$

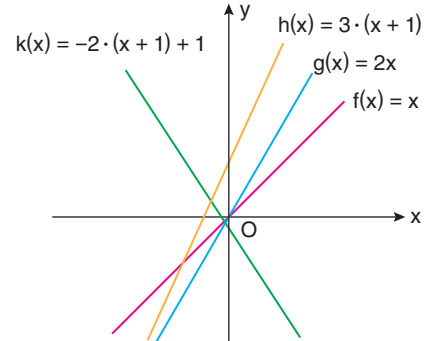
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3 \cdot (x + 1)$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = -2 \cdot (x + 1) + 1$$

fonksiyonları veriliyor.

Aşağıdaki tabloyu verilen fonksiyonlara göre doldurup fonksiyonların grafiklerini dik koordinat düzleminde gösterelim. Bu fonksiyonların nitel özelliklerini bulalım.

Fonksiyon	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$f(x) = x$			
$g(x) = 2x$			
$h(x) = 3 \cdot (x + 1)$			
$k(x) = -2 \cdot (x + 1) + 1$			



Fonksiyon Nitel Özellik	$f(x) = x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 3 \cdot (x + 1)$	$k(x) = -2 \cdot (x + 1) + 1$
Tanım Kümesi				
Görüntü Kümesi				
İşareti				
Sıfırı				
Artan-Azalanlık				
Maksimum Değer				
Minimum Değer				
Bire Birliği				

DİFnot

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere gerçel sayılarda tanımlı $f(x) = ax + b$ biçimindeki doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken:

1. Yol

1. adım: $g(x) = x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. adım: g fonksiyonunun tanım aralığındaki her elemanı a katı ile eşleyen $h(x) = ax$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
3. adım: $b \in \mathbb{R}^+$ ise h fonksiyonunun grafiği y eksenini boyuncaya pozitif yönde b birim ötelenerek, $b \in \mathbb{R}^-$ ise h fonksiyonunun grafiği y eksenini boyuncaya negatif yönde $|b|$ birim ötelenerek elde edilir.

2. Yol

1. adım: $f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{a}\right)$ biçiminde yazılır.
2. adım: $g(x) = x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
3. adım: $h(x) = x + \frac{b}{a}$ biçimindeki h fonksiyonunun grafiği $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}^+$ ise g fonksiyonunun grafiği y eksenini boyuncaya pozitif yönde $\frac{b}{a}$ birim ötelenerek, $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}^-$ ise g fonksiyonunun grafiği y eksenini boyuncaya negatif yönde $\left|\frac{b}{a}\right|$ birim ötelenerek çizilir.
4. adım: h fonksiyonunun tanım aralığındaki her elemana $\frac{b}{a}$ eklendikten sonra a katı ile eşleyen $f(x) = a \left(x + \frac{b}{a}\right)$ biçimindeki f fonksiyonunun grafiği elde edilir.

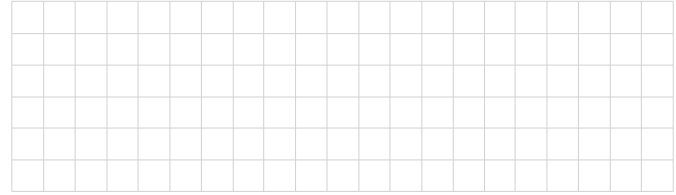
Örnek 10

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x - 6$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2 \cdot (x + 1) + 2$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre verilen fonksiyonları $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ doğrusal fonksiyonunun grafiğine uygun dönüşümler yaparak çiziniz.



Örnek 11

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x + \frac{1}{4}$$

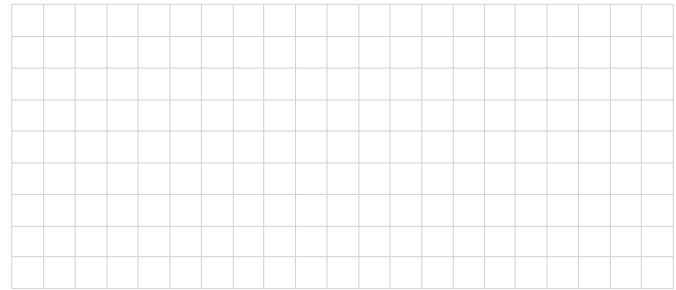
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x + 2$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = 3 \cdot (x + 1) - 2$$

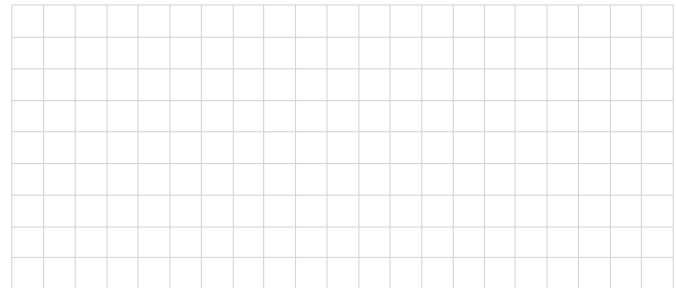
fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

- a. g, h ve k fonksiyonlarının grafiklerinin eksenleri kestiği noktaları bulunuz.**



- b. Fonksiyonları temsil eden doğruların eğimini bulunuz.**



Örnek 12

Yerden 1200 metre yükseklikten paraşütle sabit hızla atlayan bir kişinin 20 saniye sonunda yerden yüksekliği 800 metredir.

Buna göre paraşütçünün,

- a. Zamana bağlı (saniye) yerden yüksekliği (metre) değişimini bir fonksiyon olarak ifade ediniz.

- b. Elde ettiğiniz fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

- c. Kişinin kaçınıcı saniyede 200 metre yükseklikte olduğunu bulunuz.

- d. Elde ettiğiniz fonksiyonun artanlık-azalanlık durumunu inceleyiniz.

- e. Elde ettiğiniz fonksiyon grafiğinin eğimini bulunuz.**

Örnek 13

Buzdolabı üreten bir firmanın günlük 200 000 lira sabit gideri ile birlikte, üretilen buzdolabı için 15 000 lira daha gider oluşmaktadır. Bu firmanın günde x adet buzdolabı üretmesi hâlinde toplam giderleri $f(x)$ ile gösteriliyor.

Buna göre,

- a. f fonksiyonu için bağımlı ve bağımsız değişkenleri bulunuz.

- b. f fonksiyonunun kuralını bulunuz.**

- c. f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

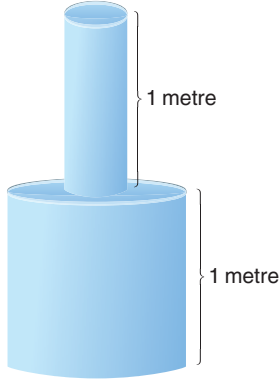
- d. f fonksiyonunun sıfırı var mıdır? Nedenini yazınız.

- e. f fonksiyonunun artanlık-azalanlık durumunu inceleyiniz.

- f. f fonksiyonunun eğimini bulunuz.

Parçalı Tanımlı Fonksiyon

Aşağıda dik silindir şeklinde iki bölümden oluşan boş bir depo verilmiştir.



Üstteki silindirin hacmi 4 metreküp, alttaki silindirin hacmi 16 metreküptür. Her iki silindirin yüksekliği de 1 metredir. Bu silindirler saatte 0,5 metreküp su akıtan bir musluk ile doldurulacaktır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

- a. Alttaki silindirde suyun yüksekliğinin ($f(x)$) zamana bağlı (x) değişimini ifade eden f fonksiyonunu bulalım.

Altaki silindirin her saatte 0,5 metreküplük kısmı yani $\frac{0,5}{16} = \frac{1}{32}$ 'lik kısmı dolacaktır.

Bu durumda x saat sonunda alttaki kısmın yüksekliği $\frac{x}{8}$ metre olur. Altaki kısmın toplamda 32 saatte dolacağına dikkat edilmelidir. Bu durumda alttaki su yüksekliğinin zamana bağlı değişimini veren f fonksiyonu $f(x) = \frac{x}{32}$, ($x \leq 32$)

şeklinde ifade edilir.

- b. Üstteki silindirde suyun yüksekliğinin ($g(x)$) zamana bağlı (x) değişimini ifade eden g fonksiyonunu bulalım.

Üstteki deponun dolma süresini alttaki depodan bağımsız olarak ele alalım.

Üstteki silindirin her saatte 0,5 metreküplük kısmı yani $\frac{0,5}{4} = \frac{1}{8}$ 'lik kısmı dolacaktır.

Bu durumda x saat sonunda alttaki kısmın yüksekliği $\frac{x}{8}$ metre olur. Üstteki kısmın toplamda 8 saatte dolacağına dikkat edilmelidir. Bu durumda üstteki suyun yüksekliğinin zamana bağlı değişimini veren g fonksiyonu $g(x) = \frac{x}{8}$, ($x < 8$) şeklinde ifade edilir.

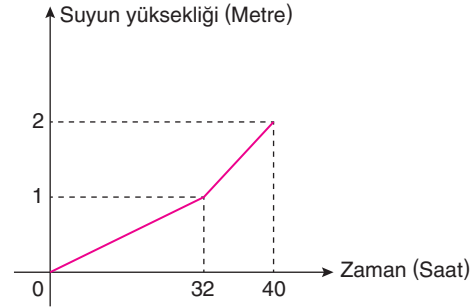
- c. Deponun tamamı için suyun yüksekliğinin $h(x)$ zamana bağlı (x) değişimini gösteren fonksiyonu bulalım.

Suyun ilk 32 saat boyunca x . saatte $\frac{x}{32}$ metre olur. 32 saatte sonra ise her 1 saatte suyun yüksekliği $\frac{1}{8}$ metre artmaktadır. Bu durumda 32 saatte sonra suyun yüksekliği $1 + \frac{x-32}{8}$ olur. Ayrıca 8. saatin sonunda suyun yüksekliği sabit kalacaktır. Şimdi bu iki durumu h fonksiyonu ile ifade edersek,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{32}, & x \leq 32 \\ 1 + \frac{x-32}{8}, & 32 < x \leq 40 \end{cases}$$

Yukarıdaki örneğe dikkat edildiğinde h fonksiyonunun tanım kümesinin ayrık alt kümesinde farklı kurallarla tanımlanacağı görülür. Bu şekilde farklı tanım aralıklarında farklı kurallarla tanımlı olan fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** denir.

h fonksiyonunun grafiğini çizelim.



h fonksiyonunun nitel özelliklerini inceleyelim.

Tanım kümesi: $[0, 40]$ aralığındadır.

Görüntü kümesi: $[0, 2]$ aralığındadır.

İşareti: $(0, \infty) +$

Sıfırı: 0'dır.

Artanlık-Azalanlık: Artandır.

Maksimum değeri: 2'dir.

Minimum değeri: 0'dır.

Bire birliği: Bire birdir.

Örnek 14

Bir kargo şirketinde ücret tarifi aşağıda verilmiştir.

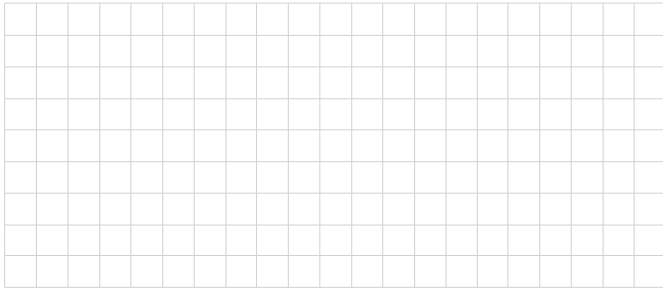
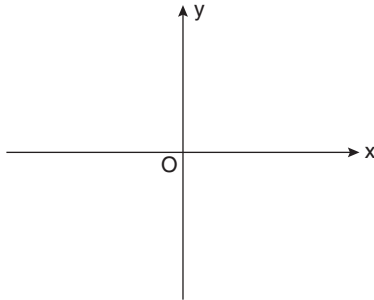
- 1 kilograma kadar 100 lira
- 1 kilogram 2 kilogram arası (2 kilogram dâhil) 110 lira
- 2 kilogramdan fazlası için sabit 120 lira

Buna göre,

- a. Bu kargo şirketinin tarifesine uygun fonksiyonu oluşturup bu fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Fonksiyon	Nitel Özellik
	Tanım Kümesi
	Görüntü Kümesi
	İşareti
	Sıfırı
	Artan-Azalanlık
	Maksimum Değer
	Minimum Değer
	Bire Birliği

- b. Fonksiyonun kuralını yazıp grafiğini çiziniz.



Örnek 15

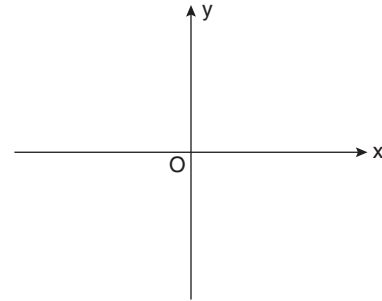
Uğur bir GSM şirketinin müşterilerine uyguladığı aylık 250 lira karşılığında sınırsız konuşma, sınırsız mesajlaşma ve 15 GB internet tarifesini kullanmaktadır. Bu tarife göre internet aşımalarında her 1 GB internet için 50 lira ücret alınmaktadır.

Buna göre,

- a. Bir ay boyunca ödeyeceği faturayı gösteren fonksiyonu bulunuz.



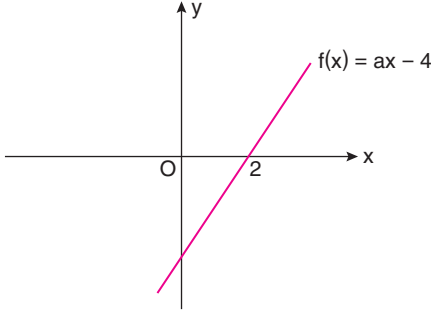
- b. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.



- c. Bu fonksiyonun nitel özelliklerini bulunuz.

Fonksiyon	Nitel Özellik
	Tanım Kümesi
	Görüntü Kümesi
	İşareti
	Sıfırı
	Artan-Azalanlık
	Maksimum Değer
	Minimum Değer
	Bire Birliği

1. Aşağıda gerçel sayılarda tanımlı $f(x) = ax - 4$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

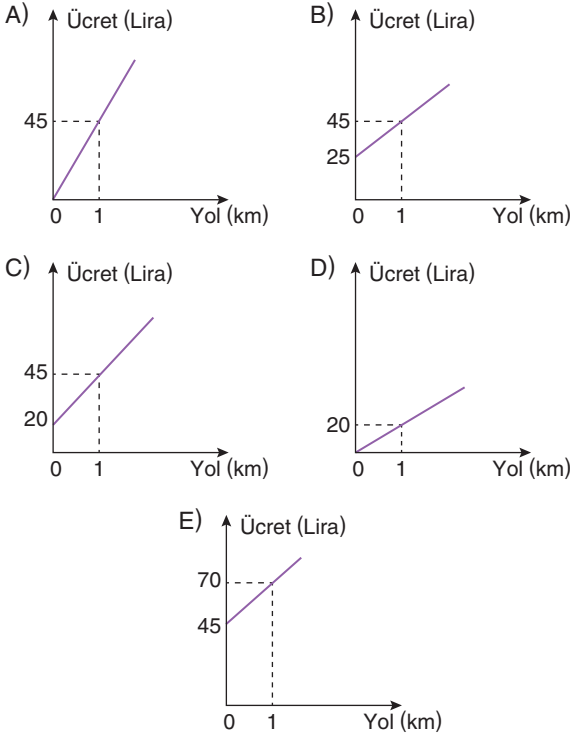


Buna göre a kaçtır?

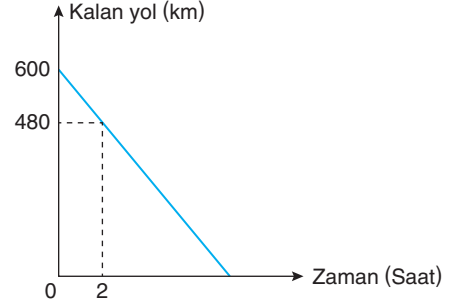
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2. Bir şehirdeki taksimetrelerin açılış ücreti 25 lira olup taksimetredeki tutar her kilometrede 20 lira artmaktadır.

Buna göre gidilen yol (km) ile ödenen toplam ücret (lira) arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



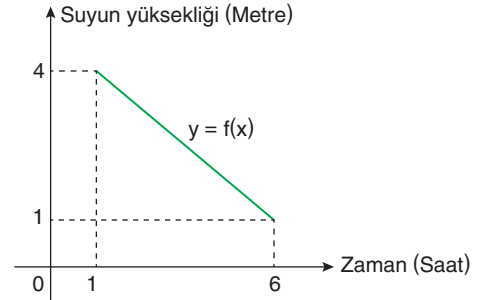
3. A kentinden B kentine doğru ilerleyen bir aracın zamana bağlı kalan yolunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre bu aracın zamana bağlı kalan yolunun değişiminin fonksiyon olarak ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f: [0, 10] \rightarrow [0, 600]$ B) $f: [0, 10] \rightarrow [0, 600]$
 $f(x) = 600 - 60x$ $f(x) = 600 - 120x$
C) $f: [0, 5] \rightarrow [0, 600]$ D) $f: [0, 5] \rightarrow [0, 600]$
 $f(x) = 600 - 120x$ $f(x) = 600 - 60x$
E) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 600 - 60x$

4. Dik koordinat düzleminde f fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) Tanım kümesi $[1, 6]$ dir.
B) Görüntü kümesi $[1, 4]$ tür.
C) Maksimum değeri 4'tür.
D) Minimum değeri 1'dir.
E) Grafiğinin eğimi $-\frac{2}{3}$ 'tür.